Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 2

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Ю. А. СУРИНОВ

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ДЛЯ СЛУЧАЯ СИСТЕМЫ СЕРЫХ ТЕЛ, РАЗДЕЛЕННЫХ ДИАТЕРМИЧЕСКОЙ СРЕДОЙ

(Представлено академиком М. В. Кирпичевым 9 X 1951)

1. Введение (Методы представления и исследования явлений движения лучистой энергии). Существуют два основных представления явлений лучистого обмена в системах серых тел, приводящих к принципиально различным методом расчета лучистого обмена*. Первый метод, известный под названием метода многократных отражений, заключается в анализе тех изменений, которые происходят с пучками лучей вследствие последовательных отражений и поглощений с течением времени. Согласно этому методу прослеживается судьба различных лучей во времени. Внимание наблюдателя фиксируется при этом на определенной порции лучистой энергии, и определяется множество ее частичных отражений и поглощений. Расчет лучистого обмена сводится в этом случае к суммированию бесчисленного множества последовательных отражений и поглощений. Этот метод, будучи весьма детальным, оказывается, однако, практически крайне затруднительным, так как приводит даже при решении простейших задач к чрезвычайно громоздким вычислениям.

Второй метод исследования явлений лучистого обмена заключается в количественном анализе процессов лучистого обмена, происходящих в данном месте поля излучения, в данный момент времени. При пользовании этим методом нет надобности вычислять бесконечные ряды последовательных отражений и поглощений. Развитие рассматриваемого представления привело к получению интегральных уравнений излучения и основанных на них общих аналитических методов расчета лучистого обмена в системах серых тел. Заметим, что оба отмеченных способа исследования процессов лучистого обмена в системах серых тел объединяются и увязываются между собой, как будет показано ниже, в интегральных уравнениях излучения. Следует, однако, подчеркнуть, что если вторая точка зрения приводит к интегральным уравнениям излучения, то первый метод (метод многократных отражений) в случае его применения к расчету лучистого обмена в системах серых тел при произвольных непрерывных температурных полях приводит непосредственно к их решению, выраженному с помощью соответствующего функционального ряда, т. е. в виде бесконечного ряда последовательных отражений (определенных соответствующими многократными интегралами).

2. Решение интегральных уравнений излучения. Ниже излагается решение стационарной задачи о распределении плотностей различных видов излучения как по граничной поверхности системы заданной конфигурации, так и по объему диатермической

* Ср. с точками зрения Лагранжа и Эйлера в гидродинамике [1].

среды, ее заполняющей, при известных непрерывных полях температур и оптических констант на границе [2,3].

Данная задача сводится к решению линейного интегрального уравнения Фредгольма вида

$$E_{\text{пад}}(M) - \int\limits_{(F)} R(N) E_{\text{пад}}(N) K(M, N) \, dF_N = \int\limits_{(F)} E_{\text{с}}(N) K(M, N) \, dF_N \, ^*, \quad (1)$$

где $E_{\text{пад}}$ и $E_{\text{с}}$ — плотности полусферического падающего и собственного излучения; R — коэффициент отражения [2,3]; $E_{\text{с}}(M)$ и $R(M)$ задаются как непрерывные функции точки на поверхности F, рассматриваемой как поверхность типа Ляпунова,

$$K(M, N) = \frac{d\varphi(M, N)}{dF_N} = \frac{\cos\theta_M \cos\theta_N}{\pi r^2_{MN}} = K(N, M).$$

Решая уравнение (1) методом итераций, получаем:

$$E_{\text{пад}}(M) = \int\limits_{(F)} E_{\text{с}}(N) d\varphi(M,N) + \int\limits_{(F)}\int\limits_{(F)} R(M_1) E_{\text{с}}(N) \, d\varphi(M,M_1) \, d\varphi(M_1,N) + \ldots$$

$$\ldots + \underbrace{\int\limits_{(F)} \cdots \int\limits_{(F)}}_{s+1} R(M_1) \ldots R(M_s) E_{\text{с}}(N) \, d\varphi(M,M_1) \cdots d\varphi(M_s, N) + \ldots, \quad (2)$$

или

$$E_{\text{пад}} = \frac{E_{\text{эф}}(M) - E_{\text{с}}(M)}{R(M)} = \int\limits_{(F)} \Gamma(M, N) E_c(N) \, dF_N, \quad (3)$$

где $\Gamma(M, N)$ — резольвента уравнения (1), определяемая бесконечным равномерно и абсолютно сходящимся функциональным рядом вида

$$\Gamma(M, N) = K(M, N) + \sum_{s=1}^{\infty} K_s(M, N), \quad (4)$$

где

$$K_s(M,N) = \underbrace{\int\limits_{(F_1)} \cdots \int\limits_{(F)}}_{s} R(M_1) \cdots R(M_s) K(M,M_1) \cdots K(M_s,N) \, dF_{M_1} \cdots dF_{M_s}. \quad (5)$$

Существуют два способа определения резольвенты $\Gamma(M, N)$. Первый из них, характеризующий метод «многократных отражений», состоит в непосредственном вычислении ряда (4). Второй способ, базирующийся на методе Фредгольма, приводит к интегральным уравнениям резольвенты вида

$$\Gamma(M, N) - K(M, N) = \int\limits_{(F)} R(P) K(M, P) \Gamma(P, N) \, dF_P =$$

$$= \int\limits_{(F)} R(P) \Gamma(M, P) K(P, N) \, dF_P, \quad (6)$$

---

* Вместо уравнения (1) удобно также рассматривать уравнение для плотности эффективного излучения $E_{\text{эф}} = E_{\text{с}} + RE_{\text{пад}}$ вида:

$$E_{\text{эф}}(M) - R(M) \int\limits_{(F)} F_{\text{эф}}(N) K(M, N) \, dF_N = E_{\text{с}}(M), \qquad M \in \mathfrak{A}_F, \qquad N \in \mathfrak{A}_F; \quad (1а)$$

в (1) и (1а) $\mathfrak{A}_F$ и $\mathfrak{A}_V$ — множества точек на поверхности F и по объему V.

решая которые, находим

$$\Gamma(M, N) = \frac{D(M, N)}{D}, \tag{7}$$

где D — определитель Фредгольма и $D(M, N)$ — первый минор Фредгольма, изображаемые соответствующими числовыми и функциональными бесконечными рядами* ([4]).

Пользуясь решением (3), которое назовем фундаментальным, а также классификацией видов излучения ([2,3]), легко найти распределения плотностей других видов излучения, описываемых соответствующими интегральными уравнениями ([2]), не отыскивая специально их решения. Рассматривая случай термодинамического равновесия системы, при котором $E_{\text{пад}} = E_{\text{эф}} = E_0 = \text{const}$, из выражения (3) получаем следующее обобщенное уравнение замкнутости системы, учитывающее многократные отражения: $\int\limits_{(F)} A(N)\Gamma(M, N)\, dF_N = 1$**, и, следовательно, для плотности результирующего излучения $E_{\text{рез}}$ на границе ($E_{\text{рез}} = A(E_{\text{пад}} - E_0)$) получаем:

$$E_{\text{рез}}(M) = A(M) \int\limits_{(F)} A(N)\,[E_0(N) - E_0(M)]\,\Gamma(M, N)\, dF_N, \qquad M \in \mathfrak{A}_F. \tag{8}$$

Перейдем к определению функций $\mathrm{E}_{4\pi}(M)$ и $\eta_{\text{пад}}(M)$ во внутренних точках поля ($M \in \mathfrak{A}_V$). Имеем:

а) для сферического вектора излучения

$$\mathrm{E}_{4\pi}(M) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{(4\pi)} \mathbf{r}_1 E_{\text{эф}}(N)\, d\omega = \int\limits_{(F)} \mathbf{r}_1 Z(M, N)\, E_c(N)\, dF_N, \qquad M \in \mathfrak{A}_V; \tag{9}$$

б) для пространственной плотности падающего излучения $\eta_{\text{пад}}$

$$\eta_{\text{пад}}(M) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{(4\pi)} E_{\text{эф}}(N)\, d\omega = \int\limits_{(F)} Z(M, N)\, E_c(N)\, dF_N, \qquad M \in \mathfrak{A}_V. \tag{10}$$

В (9) и (10) функция $Z(M, N)$ равна:

$$Z(M, N) = L(M, N) + \int\limits_{(F)} R(P)\, L(M, P)\, \Gamma(P, N)\, dF_p \; ^{***}. \tag{11}$$

$$^{*}\; D = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!} \underbrace{\int\limits_{(F)} \cdots \int\limits_{(F)}}_{n} R(M_1) \ldots R(M_n)\, K\begin{pmatrix} M_1, \ldots, M_n \\ M_2, \ldots, M_n \end{pmatrix} dF_{M_1} dF_{M_2} \ldots dF_{M_n},$$

$$D(M, N) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-)^n}{n!} \underbrace{\int\limits_{(F)} \cdots \int\limits_{(F)}}_{n} R(M_1) \ldots R(M_N)\, K\begin{pmatrix} M, M_1, \ldots, M_n \\ N, M_1, \ldots, M_n \end{pmatrix} dF_{M_1} \ldots dF_{M_n},$$

где $K\begin{pmatrix} M_1, \ldots, M_n \\ M_1, \ldots, M_n \end{pmatrix}$ и $K\begin{pmatrix} M, M_1, \ldots, M_n \\ N, M_1, \ldots, M_n \end{pmatrix}$ — определители соответственно n-го и $(n+1)$-го порядков.

** В случае системы, состоящей только из черных тел, $A(M) = 1$, $\Gamma(M, N) = K(M, N)$, и данное уравнение вырождается в тривиальное: $\int\limits_{(F)} K(M, N)\, dF_N = 1$.

*** Выражение (11) можно переписать следующим образом:

$$Z(M, N) - L(M, N) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n(M, N) =$$

$$= \int\limits_{(F)} R(P)\, Z(M, P)\, K(P, N)\, dF_p, \qquad L(M, N) = \frac{d\omega(M, N)}{\pi\, dF_N} = \frac{\cos\theta_N}{\pi r_{MN}^2},$$

В частном случае излучающей системы, состоящей из конечного числа n изотермических и однородных тел (зон), вместо интегрального уравнения (1) получим конечную систему более простых интегральных уравнений ([3]), решение которой на основании (3) будет иметь вид:

$$E_{\text{пад}}(M_i) = \frac{1}{R_i}[E_{\text{эф}}(M_i) - E_{c,\,i}] = \sum_{k=1}^{n} E_{c,\,k}\Phi(M_i, F_k) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (12)$$

где $\Phi(M_i, F_k) = \int\limits_{(F_k)} \Gamma(M_i, N_k)\, dF_{N_k}$ или

$$\Phi(M_i, F_k) - \varphi(M_i, F_k) = \sum_{j=1}^{n} R_j \int\limits_{(F_j)} \Gamma(M_i, P_j)\,\varphi(P_j, F_k)\, dF_{p_j} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} R_j \int\limits_{(F_j)} K(M_i, P_j)\,\Phi(P_j, F_k)\, dF_{p_j} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)\ ^*. \qquad (13)$$

Если геометрическая конфигурация системы удовлетворяет условию $\varphi(M_i, F_k) = \varphi_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, то, на основании (13), получим, что: $\Phi(M_i, F_k) = \Phi_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, где $\Phi_{ik} = \frac{1}{F_i}\int\limits_{(F_i)} \Phi(M_i, F_k)\, dF_{M_i}$.

В этом случае интегральное уравнение (1) вырождается в конечную систему алгебраических уравнений ([3]), решение которой запишется так: $E_{\text{пад},\, i} = \frac{1}{R_i}(E_{\text{эф}} - E_{c,\, i}) = \sum\limits_{k=1}^{n} E_{c,\, k}\Phi_{ik}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где Φ_{ik} определяется из $2n$ систем алгебраических уравнений вида:

$$\Phi_{ik} - \varphi_{ik} = \sum_{j=1}^{n} R_j \varphi_{ij}\Phi_{jk} = \sum_{j=1}^{n} R_j \Phi_{ij}\varphi_{jk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)\ ^{**}.$$

Аналогичным образом в данном случае дискретных распределений T и R на границе F можно определить другие характеристики поля излучения как граничные, так и объемные.

Поступило
23 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Прандтль и О. Титьенс, Гидро- и аэромеханика, 1—2, 1933—1935. [2] Ю. А. Суринов, ДАН, 72, № 3 (1950). [3] Ю. А. Суринов, Изв. АН СССР, ОТН, № 7 (1948); № 4 (1950); № 9 (1950). [4] И. И. Привалов, Интегральные уравнения, 1936.

так как

$$L_n(M, N) = \int\limits_{(F)} R(P)\, L(M, P)\, K_{n-1}(P, N)\, dF_p = \int\limits_{(F)} R(P)\, L_{n-1}(M, P)\, K(P, N)\, dF_p.$$

* Где $\varphi(M_i, F_k) = \int\limits_{(F_k)} K(M_i, N_k)\, dF_{N_n} = \int\limits_{(F_k)} d\varphi(M_i, N_k)$.

** Данную систему можно получить из следующего бесконечного ряда, характеризующего в явной форме метод многократных отражений:

$$\Phi_{ik} = \varphi_{ik} + \sum_{\alpha_1=1}^{n} R_{\alpha_1}\varphi_{i\alpha_1}\varphi_{\alpha_1 k} + \sum_{\alpha_1=1}^{n}\sum_{\alpha_1=1}^{n} R_{\alpha_1}R_{\alpha_2}\varphi_{i\alpha_1}\varphi_{\alpha_1\alpha_2}\varphi_{\alpha_2 k} + \cdots$$

$$\cdots + \sum_{\alpha_1=1}^{n}\cdots\sum_{\alpha_s=1}^{n} R_{\alpha_1}R_{\alpha_2}\ldots R_{\alpha_s}\varphi_{i\alpha_1}\varphi_{\alpha_1\alpha_2}\cdots\varphi_{\alpha_s k} + \cdots$$

В случае черных тел, очевидно, $\Phi_{ik} = \varphi_{ik}$.