Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 2

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. Л. МИКАЭЛЯН

ОБЩИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД ПО ЗАДАННЫМ ТРАЕКТОРИЯМ ЛУЧЕЙ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 10 I 1952)

Рассмотрим плоскую неоднородную среду, свойства которой характеризуются фазовой скоростью $v = v(x, y)$. Лучи в такой среде, как известно, распространяются по таким траекториям, что

$$\int\limits_{l_z} \frac{dl}{v(x, y)} = \min, \tag{1}$$

где l_z — траектория z-го луча.

Соответствующее этому интегралу уравнение Эйлера имеет вид

$$f(x, z) - \varphi(x, z)\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

где $f(x, z) = \frac{y''}{1 + y'^2}$, $\varphi(x, z) = y'$, $v_1(x, y) = \ln v(x, y)$, $y(x, z)$ — уравнение траекторий семейства лучей; z — параметр, определяющий данный луч (например, тангенс угла выхода луча из начала координат). Нас будет интересовать случай, когда все лучи проходят через одну точку. Не нарушая общности, мы будем считать $y(0, z) = 0$.

Задачу сформулируем следующим образом: задано семейство кривых $y = y(x, z)$; требуется подобрать такую среду, т. е. такой закон изменения $v(x, y)$, чтобы семейство $y(x, z)$ совпало с действительными траекториями лучей, распространяющихся в такой среде. Математически задача сводится к нахождению v из уравнения (2), если задана функция $y(x, z)$, а следовательно, $f(x, z)$ и $\varphi(x, z)$.

Следует отметить, что в уравнении (2) под y надо понимать $y(x, z)$; это означает, что оно будет выполняться только вдоль известных траекторий $y = y(x, z)$. Этим, между прочим, объясняется невозможность постановки рассматриваемой задачи для одной траектории, так как в этом случае мы определим $v_1(x, y)$ только вдоль одного луча, а не на всей плоскости. Поскольку, однако, мы рассматриваем семейство кривых, плотно заполняющих плоскость, и требуем, чтобы уравнение (2) выполнялось вдоль всех кривых семейства, мы можем определить $v_1(x, y)$ на всей плоскости. Уравнение (2), следовательно, мы должны написать в таком виде:

$$f(x, z) - \varphi(x, z)\left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{y=y(x, z)} + \left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{y=y(x, z)} = 0. \tag{3}$$

Будем искать $v_1[x, y(x, z)]$ в виде $v_1[x, z(x, y)]$, где под z понимается уравнение семейства кривых, разрешенное относительно z. Тогда:

$$\left.\frac{\partial v_1}{\partial x}\right|_{y=y(x,\,z)} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{y=y(x,\,z)}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{\partial v_1}{\partial y}\right|_{y=y(x,\,z)} = \frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{y=y(x,\,z)}. \tag{5}$$

Подставив теперь (4) и (5) в (3), придем к уравнению

$$f(x,z) - \varphi(x,z)\frac{\partial v_1}{\partial x} + \Phi(x,z)\frac{\partial v_1}{\partial z} = 0, \tag{6}$$

где $f(x,z)$, $\varphi(x,z)$, $\Phi(x,z) = \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{y=y(x,\,z)} - \varphi(x,z)\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{y=y(x,\,z)}$ — известные функции. Поэтому дело сводится к решению уравнения (6), которое можно провести известными методами, именно: нам надо проинтегрировать соответствующую уравнению (6) систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv_1}{-f(x,z)} = \frac{dx}{-\varphi(x,z)} = \frac{dz}{\Phi(x,z)}. \tag{7}$$

Если два независимых интеграла системы написать в виде $x = F_1(z) + c_1$ $v_1 = F_2(x,z) + c_2$, то общее решение будет выражаться таким образом

$$w(c_1, c_2) = w[x - F_1(z), v_1 - F_2(x,z)] = 0.$$

Разрешая его относительно v_1 и подставляя из уравнения семейства кривых $z = z(x,y)$, получим окончательное решение сформулированной выше задачи в форме:

$$v_1(x,y) = \ln v(x,y) = F_2[x, z(x,y)] + \chi[x - F_1(z(x,y))], \tag{8}$$

где χ — произвольная функция аргумента $x - F_1(z(x,y))$.

Таким образом, уравнение (8) решает обратную задачу геометрической оптики, т. е. позволяет найти все возможные законы изменения параметров среды, при которых действительные траектории лучей, распространяющихся в таких средах, совпадают с семейством кривых, задаваемым заранее произвольным способом. Многозначность решения физически очевидна и не требует специального пояснения.

Следует заметить, что распределения фазы и интенсивности лучей вдоль какой-либо прямой (или кривой), расположенной на пути распространения лучей, полностью определяются уравнением семейства траекторий лучей $y(x,z)$. Действительно, распределение фаз определяется законом изменения оптических длин лучей от начала координат до упомянутой прямой или законом изменения углов между этой прямой и лучами. Распределение же интенсивности лучей определяется их густотой при пересечении ими упомянутой прямой.

Если принять, что прямая параллельна оси координат, т. е. определяется уравнением $x = x_0$, то распределение интенсивности лучей будет равно $1 \Big/ \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x_0, z)$, где $\alpha = \alpha(z)$ — угол выхода луча из начала координат, определяемый из соотношения $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\partial}{\partial x} y(x,z)|_{x=0}$.

Автор выражает благодарность чл.-корр. АН СССР А. А. Пистолькорсу за обсуждение некоторых вопросов.

Московский электротехнический институт связи

Поступило 9 I 1952