Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 2

ГЕОФИЗИКА

Академик В. В. ШУЛЕЙКИН

СУЩНОСТЬ НЕКОТОРЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБЩЕАТМОСФЕРНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ

Исследования синоптических карт и непосредственно аэрологические работы показывают, что скорости атмосферных потоков непрерывно меняются как по абсолютной величине, так и по направлению. В частности, на достаточной высоте над уровнем моря воздушные потоки в средних широтах направлены в среднем приблизительно по параллели. Однако этот так называемый западный перенос воздуха претерпевает непрерывные изменения и на него налагается меридиональная составляющая, которая также непрерывно колеблется — и по абсолютной величине, и по знаку. В настоящее время еще невозможно полностью разобраться во всем крайне сложном спектре колебаний широтной и меридиональной составляющих в потоках общеатмосферной циркуляции. Поэтому настоящая работа ставит перед собой лишь весьма скромную цель: описать возможный механизм возникновения некоторых незатухающих колебаний, повидимому, принадлежащих к классу самовозбуждающихся. Даже при решении такой узкой задачи придется пока отказаться от учета сил трения. При этом станет возможным и естественным считать невозмущенную атмосферную циркуляцию в средних широтах, на достаточной высоте над уровнем моря, чисто зональной.

Направим ось X координатной системы вдоль параллели на восток, а ось Y — вдоль меридиана на север. Будем полагать меридиональную составляющую скорости ветра V_0 равной нулю. Стало быть, полная скорость ветра в невозмущенном состоянии будет тождественна с составляющей U_0, направленной на восток.

Как известно, она выражается здесь через градиент атмосферного давления, который в невозмущенном состоянии равен Γ_0 и направлен вдоль меридиана к северу (в нашем полушарии). Именно:

$$U_0 = \frac{\Gamma_0}{2\delta\overline{\omega}}. \tag{1}$$

Через $\overline{\omega}$ обозначена проекция угловой скорости ω вращения Земли на вертикаль в данной точке ($\overline{\omega} = \omega \sin \varphi$, где φ — широта места), через δ — плотность воздуха.

При всяком небольшом возмущении такого — чисто зонального — потока, вообще говоря, возникает какая-то меридиональная составляющая v скорости ветра, которая связана с приращением γ градиента Γ_0 и приращением u широтной составляющей U_0 посредством соотношений гидродинамики;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\overline{\omega} v, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -2\overline{\omega} u + \frac{\gamma}{\delta}. \tag{3}$$

Но ведь, с другой стороны, возникновение меридиональной составляющей v не может не отразиться на тепловом состоянии атмосферы в соответствующем районе, и нетрудно себе представить, как оно отразится. Действительно, сам градиент Γ_0 возник в атмосфере благодаря различию теплового режима на различных широтах. Всякий приток воздуха от низких широт к более высоким должен так или иначе смягчать подобное различие и тем самым воздействовать в конечном счете на градиент атмосферного давления Γ_0 в сторону его уменьшения.

Нам неизвестен сколько-нибудь точный закон убывания градиента Γ_0 при возникновении меридиональной составляющей v. Классическое уравнение Остроградского — Кирхгофа, применяемое в математической физике для описания процессов теплопередачи, здесь не помогло бы построить систему уравнений термо-гидродинамики, доступную даже для приближенного интегрирования. Поэтому для предварительного суждения об интересующих нас явлениях придется принять линейную зависимость $\partial\gamma / \partial t$ от v и от $\partial v / \partial t$.

Но ведь тепловой режим Европы находится не только под воздействием теплопередачи вдоль меридианов, а также и под действием тепла, поступающего с Атлантического океана. Следовательно, величина Γ_0 должна убывать не только при появлении положительно направленной составляющей v, но и при появлении положительно направленной составляющей u, поскольку последняя свидетельствует о дополнительном поступлении в Европу тепла с запада, с Атлантического океана.

За неимением сколько-нибудь точных сведений, примем здесь аналогичную линейную зависимость и запишем в общей форме:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = -\left(mu + p\frac{\partial u}{\partial t} + nv + q\frac{\partial v}{\partial t}\right), \tag{4}$$

не предрешая, каковы относительные значения m / n, p / q, p / m в том или ином районе материка.

Соотношение (4) является единственным гипотетическим в настоящем исследовании. Дальнейшие работы покажут, насколько близко оно к природным условиям и каковы те поправки, которые необходимо внести в анализ для дальнейшего приближения к истине.

К уравнениям гидродинамики (2), (3) можно было бы добавить еще условие неразрывности, которому должны удовлетворять воздушные потоки. Однако в нашей задаче это условие не используется, поскольку мы не интересуемся третьей — вертикальной — составляющей воздушных потоков.

Легко показать, что наличие условия (4) вместе с соотношениями (2), (3) обеспечивает возникновение колебаний в общей атмосферной циркуляции. Действительно, продифференцируем (3) по времени и в полученное дифференциальное уравнение второго порядка подставим выражение $\partial\gamma / \partial t$ из (4). Тогда после простых преобразований можно будет записать:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{q}{\delta}\frac{\partial v}{\partial t} + \left(\frac{n}{\delta} + 2\bar{\omega}\frac{p}{\delta} + 4\bar{\omega}^2\right)v + \frac{m}{\delta}u = 0\,. \tag{5}$$

Остается исключить отсюда переменную u для получения дифференциального уравнения, связывающего с t лишь переменную v. Для этого продифференцируем (5) по времени и учтем выражение $\partial u / \partial t$ через v, даваемое уравнением (2). Тогда окажется:

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + \frac{q}{\delta}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left(\frac{n}{\delta} + 2\bar{\omega}\frac{p}{\delta} + 4\bar{\omega}^2\right)\frac{\partial v}{\partial t} + 2\bar{\omega}\frac{m}{\delta}v = 0. \tag{6}$$

Наибольший интерес представляет частный случай этого уравнения при малых значениях коэффициентов p, q. Для исследования этого случая положим $p=0$, $q=0$ и запишем вместо (6):

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}+\left(\frac{n}{\delta}+4\bar{\omega}^2\right)\frac{\partial v}{\partial t}+2\bar{\omega}\,\frac{m}{\delta}\,v=0. \qquad (7)$$

Начальное условие запишется так: при $t=0$ $\quad v=0$.

Тогда интеграл уравнения (7) можно будет представить в виде:

$$v=ae^{\beta_1 t}\sin\omega_1 t, \qquad (8)$$

причем β_1 — существенно положительная величина:

$$\beta_1=\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{n}{\delta}+4\bar{\omega}^2\right)}\cdot\operatorname{sh}\frac{\psi}{3}. \qquad (9)$$

С другой стороны,

$$\omega_1=\sqrt{\frac{n}{\delta}+4\bar{\omega}^2}\cdot\operatorname{ch}\frac{\psi}{3}. \qquad (10)$$

В свою очередь, вспомогательная функция ψ определяется из условия

$$\frac{\operatorname{sh}\psi}{\operatorname{ch}\frac{\psi}{3}}=3\sqrt{3}\,\frac{m}{n}\,\tau\sin\varphi\,; \qquad (11)$$

здесь через τ обозначен период колебаний, причем за единицу времени приняты сутки.

Из полученных уравнений (8) — (11) вытекают весьма любопытные заключения. Именно, поскольку величина β_1 — существенно положительная, амплитуда колебаний скоростей должна возрастать во времени (дальнейшие исследования покажут, как это возрастание умеряется под воздействием трения). Как видно из (11), решающую роль при этом играет отношение коэффициентов m и n. Другими словами, решающую роль играет питание колебательной системы теплом, приносимым с океана, поскольку m характеризует именно приток тепла с океана, как это видно из схематического уравнения (4). Чем больше m, тем больше оснований ожидать возникновения колебаний, нарастающих по амплитуде, в нашей задаче без учета трения.

Нет нужды давать анализ решения полного уравнения (6): легко видеть, что член $2\bar{\omega}\,\frac{p}{\delta}$ в круглой скобке не играет принципиальной роли; что касается второго члена уравнения (6), содержащего вторую производную от v по времени, то — как нетрудно убедиться — он свидетельствовал бы о затухании колебаний, если бы не было последнего члена в (6), содержащего v. Одновременное присутствие и последнего, и второго члена в (6) означает своеобразную борьбу факторов, способствующих нарастанию, и факторов, способствующих затуханию колебаний. Перевес оказывается на той или иной стороне в зависимости от относительных значений коэффициентов m и q.

Остается еще исследовать угловую частоту и период колебаний. Как видно из (10), угловая частота ω_1 может оказаться довольно близкой по своей величине к частоте чрезвычайно распространенных в природе колебаний инерционного происхождения. Под воздействием кориолисовой силы последние происходят с частотой $2\bar{\omega}=2\omega\sin\varphi$. Иными словами, близ полюсов это — чисто полусуточные колебания, а в средних широтах они более или менее отличаются от полусуточных, в зависимости от значения синуса широты. Совершенно очевидно, что подобные — чисто инерционные — колебания скоростей воздуха, вызванные какими-либо возмущениями, могут интерферировать с термобарическими колебаниями, которыми мы занимаемся в настоящей статье. При этом неизбежно возникновение биений с периодом T, который определяется по заданным частотам ω_1 и $2\bar{\omega}$:

$$\frac{2\pi}{T} = \omega_1 - 2\bar{\omega}, \tag{12}$$

где вместо ω_1 можно подставить его выражение из (10).

Ограничимся лишь исследованием случая малых значений вспомогательной функции ψ. В соответствии с этим положим $\operatorname{ch}\frac{\psi}{3} = 1$. Тогда, на основании (10) и (12), можно будет приближенно записать:

$$\frac{2\pi}{T} = 2\bar{\omega}\left(\sqrt{\frac{n}{4\delta\bar{\omega}^2} + 1} - 1\right), \tag{13}$$

или, при малых значениях коэффициента n:

$$\frac{2\pi}{T} \approx 2\bar{\omega}\left(\frac{n}{8\delta\bar{\omega}^2}\right) = \frac{n}{4\delta\bar{\omega}}. \tag{14}$$

Отсюда, соответственно, определяется период T биений:

$$T \approx 8\pi\frac{\delta\bar{\omega}}{n}. \tag{15}$$

С другой стороны, исследованные колебания скоростей должны неизбежно приводить к колебаниям турбулентного теплообмена между океаном и материком в атмосферных потоках. В этих колебаниях теплообмена должны проявиться не только малые периоды, соответствующие непосредственно частоте ω_1, но и большие периоды T своеобразных макропроцессов. Нет надобности доказывать, насколько важно поставить исследования этих процессов.

Поступило
14 I 1952