Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 2

ФИЗИКА

Ю. В. НОВОЖИЛОВ

О СОБСТВЕННОЙ ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОНА И РАДИАЦИОННЫХ ПОПРАВКАХ

(Представлено академиком В. А. Фоком 14 I 1952)

Проблему собственной энергии электрона естественнее всего рассматривать с точки зрения метода функционалов Фока ([1]), так как в методе функционалов определено понятие волновой функции электрона с собственной энергией и, кроме того, можно не пользоваться схемой вторичного квантования для электронно-позитронного поля и многовременным формализмом. Благодаря этому с помощью метода функционалов можно не только более простым образом получить все уже известные выражения для электромагнитной массы и радиационных поправок в приближении e^2, но и найти производящие функции для получения выражений электромагнитной массы и радиационных поправок в любом приближении по e^2. В работе используется квантование скалярного электромагнитного поля по неопределенной метрике, предложенное в работе ([2]).

1. Волновое уравнение квантовой электродинамики в методе функционалов Фока ([1, 3]) для случая одного электрона при квантовании скалярного поля по неопределенной метрике записывается в виде:

$$H\Omega \equiv \{i(\vec{\gamma}, \mathbf{P}) - \gamma_4 P_0 + m_0\}\,\Omega = e\,\{i(\vec{\gamma}, \mathbf{A}) - \gamma_4 A_0\}\,\Omega, \tag{1}$$

где вектор $\vec{\gamma}$ составлен из матриц $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$; $\mathbf{P} = -i\,\mathrm{grad} - e\mathbf{A}^0$; $P_0 = i\dfrac{\partial}{\partial t} - eA_0^0$; $(\mathbf{A}^0, iA_0^0)$ — 4-потенциал внешнего поля; $h = c = 1$. Квантованный 4-потенциал поля излучения $(\mathbf{A}, iA_0)$ определен формулами (2) — (6):

$$\Box A_\lambda = 0 \quad (\lambda = 0, 1, 2, 3); \tag{2}$$

$$\mathbf{A} = (2\pi)^{-3/2}\int (d\mathbf{k})\,(2k)^{-1/2}\sum_r \mathbf{e}(\mathbf{k}, r)\,[b(\mathbf{k}, r)\,e^{i(k\cdot x)} + b^+(\mathbf{k}, r)\,e^{-i(k\cdot x)}],\quad r = 1, 2, 3; \tag{3}$$

$$A_0 = (2\pi)^{-3/2}\int (d\mathbf{k})(2k)^{-1/2}\,[b(\mathbf{k}, 0)\,e^{i(k\cdot x)} + b^+(\mathbf{k}, 0)\,e^{-i(k\cdot x)}]; \tag{4}$$

$$\begin{gathered} b(\mathbf{k}j)\,b^+(\mathbf{k}'j') - b^+(\mathbf{k}'j')\,b(\mathbf{k}j) = g_{jj'}\,\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ g_{rr'} = \delta_{rr'},\quad g_{00} = -1,\quad g_{0r} = 0; \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} (\mathbf{e}(\mathbf{k}, r), \mathbf{e}(\mathbf{k}, r')) = \delta_{rr'},\quad (e(\mathbf{k}, 3), \mathbf{k}) = \mathbf{k}; \\ (a\cdot b) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - a_0 b_0,\quad (d\mathbf{k}) = dk_1 dk_2 dk_3. \end{gathered} \tag{6}$$

Сопряженный оператор A_λ^+ связан с эрмитово-сопряженным оператором A_λ^* соотношением $A_\lambda^+ = \eta^{-1} A_\lambda^* \eta$; оператор η обладает свойствами $\eta^2 = 1$; $\eta = \eta^*$, $\eta A_r = A_r \eta$, $\eta A_0 = -A_0 \eta$ и входит в определение среднего значения $\overline{f(A_\lambda)} = (\Omega^*, \eta f(A_\lambda)\Omega) \equiv (\Omega^+, f(A_\lambda)\Omega)$. Все компоненты A_λ считаются самосопряженными: $A_\lambda = A_\lambda^+$. Функционал состояния Ω имеет вид

$$\Omega = \sum_{q=0}^{\infty} \Omega_q =$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{q!}} \sum_{j_1 \ldots j_q} \int (d\mathbf{k}_1) \ldots (d\mathbf{k}_q)\, \psi_q(x; \mathbf{k}_1 j_1, \ldots, \mathbf{k}_q j_q)\, \overline{b}(\mathbf{k}_1 j_1) \ldots \overline{b}(\mathbf{k}_q j_q), \tag{7}$$

где ψ_q есть волновая функция электрона, если в поле есть q фотонов; x означает переменные электроны; $j = 1, 2$ соответствует поперечным фотонам, $j = 0, 3$ — скалярным и продольным фотонам; $\overline{b}(\mathbf{k}j)$ — вспомогательная функция. Оператор $b^+(\mathbf{k}j)$ является оператором умножения на $\overline{b}(\mathbf{k}j)$, а оператор $b(\mathbf{k}j)$ — оператором функциональной производной: $b(\mathbf{k}j) = \frac{\delta}{\delta \overline{b}(\mathbf{k}j)}$, $j = 1, 2, 3$; $-b(\mathbf{k}, 0) = \frac{\delta}{\delta \overline{b}(\mathbf{k}, 0)}$. Формулы (3) и (4) относятся к случаю, когда направление времени одинаково и для операторов A_λ и для функционала Ω. Если направление времени различно для A_λ и Ω, то $b^+(\mathbf{k}j)$ и $b(\mathbf{k}j)$ в (3) и (4) меняются местами.

Дополнительное условие для функционала Ω имеет вид

$$\{[b(\mathbf{k}, 3) - b(\mathbf{k}, 0)] + e \cdot 2^{-1/2} (2\pi k)^{-3/2} e^{-i(k \cdot x)}\}\, \Omega = 0. \tag{8}$$

2. Пусть взаимодействие между электроном и полем излучения адиабатически вводится, начиная с $t_0 = -\infty$, и выводится к $t_1 = +\infty$, достигая полной величины во все конечные времена t. Наша задача заключается в определении функций $\psi_q(x; \mathbf{k}_1 j_1, \ldots, \mathbf{k}_q j_q)$, $j = 1, 2$, $q = 0, 1, 2, \ldots$, из системы уравнений

$$H\psi_q(x; \mathbf{k}_1 j_1, \ldots, \mathbf{k}_q j_q) = \sqrt{q+1}\, e \sum_{j=0}^{3} \int (d\mathbf{k})\, G^+(x; \mathbf{k}j)\, \psi_{q+1}(x; \mathbf{k}j, \mathbf{k}_1 j_1, \ldots, \mathbf{k}_q j_q) +$$

$$+ \frac{e}{\sqrt{q}} \{G(x; \mathbf{k}_1 j_1)\, \psi_{q-1}(x; \mathbf{k}_2 j_2, \ldots, \mathbf{k}_q j_q) + \ldots$$

$$\ldots + G(x; \mathbf{k}_q j_q)\, \psi_{q-1}(x; \mathbf{k}_1 j_1, \ldots, \mathbf{k}_{q-1} j_{q-1})\}, \tag{9}$$

где $G(x; \mathbf{k}j) = i(\overrightarrow{\gamma}, e(\mathbf{k}, j))(2\pi)^{-3/2}(2k)^{-1/2} e^{-i(k \cdot x)}$, $j = 1, 2, 3$; $G(x; \mathbf{k}, 0) = -\gamma_4 (2\pi)^{-3/2} (2\mathbf{k})^{-1/2} e^{-i(k \cdot x)}$, $G^+(x; \mathbf{k}, 0) = -G^*(x; \mathbf{k}, 0)$, являющейся следствием основного уравнения (1), если при $t_0 = -\infty$

$$\psi_q(x; \mathbf{k}_1 j_1, \ldots, \mathbf{k}_q j_q) = \delta_{qr}\, \varphi_r(x)\, \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_1') \ldots \delta(\mathbf{k}_q - \mathbf{k}_q')\, \delta_{j_1 j_1'} \ldots \delta_{j_q j_q'}, \tag{10}$$

где $\varphi_r(x)$ есть решение уравнения Дирака $H\varphi_r(x) = 0$.

Функцию $\psi_r(x; \mathbf{k}_1 j_1, \ldots, \mathbf{k}_r j_r)$, $j = 1, 2$, можно назвать волновой функцией электрона с собственной энергией, если в поле есть r фотонов; $\psi_q(x; \mathbf{k}_1 j_1, \ldots, \mathbf{k}_r j_r)$, $j = 1, 2$, при $t = \infty$ есть амплитуда вероятности излучения $(q - r)$ фотонов, если $q > r$, или поглощения $(r - q)$ фотонов, если $r > q$, с учетом всех эффектов собственной энергии. Условие (8) удовлетворяется благодаря выбору искомых функций.

3. Каждое из уравнений (9) является неоднородным уравнением Дирака типа $H\psi(x) = C(x)$, общее решение которого записывается в виде

$$\psi(x) = \int K(x, x')\, C(x')\, d\omega' + \varphi(x), \quad d\omega' = dt'\, dx_1'\, dx_2'\, dx_3', \tag{11}$$

где $\varphi(x)$ есть решение однородного уравнения. Функция $K(x, x')$, определяемая неоднородным уравнением $H(x) K(x, x') = \delta(t-t') \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$ и требованием, чтобы (11) соответствовало теории позитрона ([4]), выражается через фундаментальное решение U_1 уравнения Дирака первого порядка и функцию Римана R уравнения Дирака второго порядка, а также функцию R', изученные В. А. Фоком ([5])

$$K(x, x') \gamma_4 = {}^1/_2 [\varepsilon(t-t') S(x, x') + U_1(x, x')], \tag{12}$$

где $S(x, x') = \{P_0 + m_0\gamma_4 + (\overrightarrow{\alpha}, \mathbf{P})\} \{R(x, x') \gamma(\xi) + R'\delta(\xi)\}$; $HS(x, x') = 0$;

$\varepsilon(a) = \dfrac{a}{|a|}$, $\gamma(a) = \dfrac{1}{2}[1 + \varepsilon(a)]$, $\xi = -(x \cdot x)$. Если $K(x, x')$ рассматривать как матричные элементы $(x|K|x')$ оператора K в координатно-временном представлении (спинорные значки опускаются) и ввести обозначение $C_\tau^+(k) = \gamma_\tau e^{-i(k\cdot x)}$, то, решив (9), мы получаем, например, в приближении e^4 для ψ_0 при $r = 0$ в (10):

$$\psi_0(x) = \Big\{1 + (-ie^2)\int \frac{d^4q}{(q\cdot q)} KC_\tau^+ KC_\tau +$$

$$+ (-ie^2)^2 \int \frac{d^4q_1 d^4q_2}{(q_1\cdot q_1)(q_2\cdot q_2)} [KC_\tau^+ KC_\tau KC_\nu^+ KC_\nu + KC_\tau^+ KC_\nu^+ KC_\tau KC_\nu +$$

$$+ KC_\tau^+ KC_\nu^+ KC_\nu KC_\tau]\Big\} \varphi_0(x); \quad C_\nu = C_\nu(q_1); \quad C_\tau = C_\tau(q_2). \tag{13}$$

При интегрировании в (13) $(q \cdot q)$ заменяется на $(q\cdot q) - i\varepsilon$, где ε бесконечно мало, $d^4q = dq_0 (d\mathbf{q}) (2\pi)^{-4}$.

Если обозначить посредством $e\Phi$ оператор взаимодействия (правую часть (1)), то (13) есть среднее значение в вакуумном состоянии (нет фотонов) величины $1 + e^2(K\Phi)^2 + e^4(K\Phi)^4$.

Общее решение поставленной в п. 2 задачи записывается в виде:

$$\psi_q(x; \mathbf{k}_1 j_1, \ldots, \mathbf{k}_q j_q) =$$

$$= (1\mathbf{k}_1 j_1, \ldots, 1\mathbf{k}_q j_q | [1 - eK\Phi]^{-1} | 1\mathbf{k}'_1 j'_1, \ldots, 1\mathbf{k}'_r j'_r) \varphi_r(x), \tag{14}$$

где $1\,\mathbf{k}j$ означает один фотон в состоянии $\mathbf{k}j$, $j = 1, 2$. Из (14) следует, что ψ_0 описывает стационарное состояние, если нет внешнего поля или φ_0 есть волновая функция основного состояния электрона во внешнем поле.

4. На опыте всегда наблюдаются электроны с перенормированной массой $m = m_0 + \delta m$, тогда как в (1) входит параметр m_0. Если учесть это обстоятельство, то мы получаем соотношение, определяющее электромагнитную массу δm.

$$dm\psi_0^0 = -e(0|\Phi[1 - K_0(\delta m + e\Phi)]^{-1}|0)\psi_0^0 \equiv M\psi_0^0, \tag{15}$$

K_0 и ψ_0^0 связаны с уравнением Дирака для свободной частицы.

Для оператора радиационных поправок R в уравнении Дирака находим соотношение

$$R\psi_0 = -M\psi_0 - (0|e\Phi[1 - K_1(\delta m + R + e\Phi)]^{-1}|0)\psi_0 - Fe\Phi^0\psi_0, \tag{16}$$

где $\Phi^0 = i(\overrightarrow{\gamma}, \mathbf{A}^0) - \gamma_4 A_0^0$; $\{H_1 + R\} K_1 \equiv \{i(\overrightarrow{\gamma}, \mathbf{P}) - \gamma_4 P_0 + m + R\} K_1 = 1$;
$F(x, x') = \dfrac{1}{2}\int M(x, x') [\varepsilon(t-t') - \varepsilon(t''-t')] S(x'', x') d\omega''$.

Соотношение для оператора R может быть записано в ином виде:

$$K_2 R\chi = -\sum S_n (1 + K_2 R)\chi; \quad S_n = (0 \,|\, [K_2 (\delta m + e\Phi)]^n \,|\, 0), \tag{17}$$

где $H_1\chi = 0$; $H_1 K_2 = 1$. Если разложить δm и R в ряд по степеням e^2: $\delta m = e^2\mu_1 + e^4\mu_2 + \ldots + e^{2n}\mu_n + \ldots$; $R = e^2R_1 + e^4R_2 + \ldots + e^{2n}R_n + \ldots$, то выражения (15)—(17) могут рассматриваться как производящие функции для поправок μ_n и R_n. При этом в первом приближении получаются известные результаты для μ_1 и R_1. Отметим, что $\mu_n\,\psi_0^0 = (0 \,|\, \Phi K_0 R_{n-1}(\Phi) \,|\, 0)\,\psi_0^0$.

Выражение

$$\psi_q(\mathbf{r}, t_1; \mathbf{k}_1 j_1, \ldots, \mathbf{k}_q j_q) =$$

$$= (1\mathbf{k}_1 j_1, \ldots, 1\mathbf{k}_q j_q \,|\, [1 - K_1(\delta m + R + e\Phi)]^{-1} \,|\, 0)\,\varphi_0(x) \tag{18}$$

есть амплитуда вероятности излучения q фотонов со всеми поправками. Аналогичным образом мы получаем для амплитуды вероятности рассеяния q фотонов на свободном электроне:

$$\psi_q(\mathbf{r}, t_1; \mathbf{k}_1 j_1, \ldots, \mathbf{k}_q j_q) =$$

$$= (1\mathbf{k}_1 j_1, \ldots, 1\mathbf{k}_q j_q \,|\, [1 - K_0(\delta m + e\Phi)]^{-1} \,|\, 1\mathbf{k}_1' j_1, \ldots, 1\mathbf{k}_q' j_q')\,\varphi_q(x). \tag{19}$$

В частном случае, когда $q = 1$, находим в приближении e^4

$$\psi_1(\mathbf{r}, t_1; \mathbf{k}j) = (1\mathbf{k}j \,|\, e^2(K\Phi)^2 + e^4[K\Phi K R_1(\Phi) + K R_1(\Phi) K\Phi] \,|\, 1\mathbf{k}'j')\,\varphi_1(x). \tag{20}$$

Первый член в (20) приводит к формуле Клейна — Нишины для вероятности, а второе слагаемое обусловливает радиационную поправку к формуле Клейна — Нишины, совпадающую в приближении e^6 с поправкой, вычисленной в работе ([6]).

В заключение приношу благодарность акад. В. А. Фоку за ценные замечания и детальное обсуждение.

Поступило
11 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Фок, Sow. Phys., **6**, 425 (1934). [2] S. N. Gupta, Proc. Phys. Soc., **63A**, 681 (1950). [3] В. А. Фок, Уч. зап. ЛГУ, **3**, 108 (1937). [4] R. P. Feynman, Phys. Rev., **75**, 749, 769 (1949). [5] В. А. Фок, Изв. АН СССР, сер. физ., № 4—5, 551 (1937). [6] K. Schafrot, Helv. Phys. Acta, **22**, 392, 501 (1949).