Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 1

ФИЗИКА

Ф. И. ФЕДОРОВ

ОБОБЩЕННЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ВОЛНОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком В. А. Фоком 2 XI 1951)

За последние годы значительно продвинулась вперед разработка общей теории релятивистских волновых уравнений вида

$$(\gamma_k \nabla_k + i\varkappa)\psi = 0, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad x_4 = ict, \quad \varkappa \neq 0. \tag{1}$$

Как известно, выбор матриц γ_k этих уравнений ограничивается следующими основными условиями: I. Инвариантность уравнений (1) относительно преобразований собственной группы Лоренца. II. Инвариантность относительно отражений. III. Возможность получения уравнений (1) из инвариантной функции Лагранжа.

Постоянная $\varkappa$ считается пропорциональной массе частицы. Поэтому ограничение $\varkappa \neq 0$ означает, что уравнение (1) пригодно лишь для частиц, обладающих ненулевой массой покоя. Детально исследованы простейшие частные случаи уравнений (1), включая уравнение Дирака. Хотя системы вида (1) иногда называют «общими релятивистскими уравнениями» [1], однако на самом деле они не являются таковыми. Действительно, уравнения (1) не включают в себя, например, такую фундаментальную систему релятивистских уравнений, как уравнения Максвелла — Лоренца, что естественно, если учесть нулевую массу покоя фотонов.

Самая общая форма линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами может быть записана в виде

$$(\gamma_k \nabla_k + i\gamma_0)\psi = 0, \tag{2}$$

где γ_0 — некоторая матрица. К виду (2) можно привести всякую систему линейных дифференциальных уравнений любого порядка с постоянными коэффициентами. Если γ_0 — неособенная матрица, то умножением на γ_0^{-1} уравнение (2) приводится к (1). Если же $|\gamma_0| = 0$, то уравнение (2) несводимо к (1). Будем называть уравнения (2) с условиями I—III, причем квадратная матрица γ_0 может быть особенной, **обобщенными релятивистскими волновыми уравнениями**. До сих пор, насколько известно автору, не были рассмотрены конкретные примеры таких уравнений и вообще их исследованию почти не уделялось внимания. Между тем, легко видеть, что они охватывают единой общей схемой все возможные виды релятивистских уравнений, получаемых из вариационного принципа, включая важнейшие из них — уравнения Максвелла и Дирака.

Свойства матриц γ_k подробно изучены в [1]. Что же касается матрицы γ_0, то в работе [2] были установлены лишь те ее свойства, которые вытекают из условия I. Последнее приводит к тому, что γ_0 должна быть диагональной и состоять из независимых скалярных ящиков, соответствующих различным неприводимым представлениям τ

собственной группы Лоренца. Обозначим элементы γ_0 через α_τ и используем условия II и III. Условие II влечет за собой коммутативность γ_0 с преобразованием отражения, откуда следует соотношение

$$\alpha_\tau = \alpha_{\dot{\tau}}, \tag{3}$$

где $\dot{\tau}$ есть представление, «сопряженное» к представлению τ относительно отражения (если $\tau \sim (k_0, k_1)$, то $\dot{\tau} \sim (k_0, -k_1)$, см. ([1])). Наконец, условие III требует, чтобы существовала инвариантная билинейная эрмитова форма (ψ, φ) и чтобы

$$(\gamma_0\psi, \varphi) = (\psi, \gamma_0\varphi), \tag{4}$$

откуда следует

$$\alpha_\tau = \overline{\alpha}_{\tau^*}\,^*. \tag{5}$$

Здесь τ^* означает представление, «сопряженное» к τ относительно билинейной формы (если $\tau \sim (k_0, k_1)$, то $\tau^* \sim (k_0, -\overline{k}_1)$, см. ([1])). Для конечномерных уравнений $\dot{\tau}^* = \tau$. Если, кроме того, матрица γ_0 вещественна, то (5) сводится к (3). Впрочем, умножая базисные векторы представления на подходящие числа $b(\tau) = b(\dot{\tau}) = b(\tau^*)$, можно, не нарушая условий (3), (5), сделать все $\alpha_\tau \neq 0$ равными единице. В таком случае условия (3), (5) означают только то, что $\alpha_\tau, \alpha_{\dot{\tau}}, \alpha_{\tau^*}$ должны все одновременно равняться либо нулю, либо единице **. Выражения для функции Лагранжа, тензора энергии — импульса и вектора тока в случае уравнений (2) имеют вид

$$L = -\left(\psi, \left(\frac{1}{i}\gamma_k\nabla_k + \gamma_0\right)\psi\right), \quad T_{kl} = \frac{1}{i}(\psi, \gamma_l\nabla_k\psi), \quad S_k = \varepsilon(\psi, \gamma_k\psi); \tag{6}$$

из них только функция Лагранжа отличается от таковой для уравнений (1) заменой $(\psi, \varkappa\psi)$ на $(\psi, \gamma_0\psi)$. При этом, как обычно, в силу уравнений (2), $\nabla_l T_{kl} = \nabla_k S_k = 0$.

Рассмотрим примеры уравнений (2) с $|\gamma_0| = 0$. Как вытекает из вышеизложенного, мы можем получать такие уравнения из уравнений (1), если в скалярной матрице $\varkappa$ положим часть элементов, относящихся к некоторым представлениям τ (вместе с $\dot{\tau}$ и τ^*), равными нулю. Напишем уравнения (1) для частицы со спином 0 в следующем виде

$$\nabla_i\psi_i + a\psi = 0, \quad \nabla_i\psi + b\psi_i = 0. \tag{7}$$

Отсюда можно получить уравнения (2), полагая: 1) $a = 0$, 2) $b = 0$' 3) $a = b = 0$. В случае 3) система распадается и становится неопределенной. В случае 2) она сводится к одному уравнению $\nabla_i\psi_i = -\psi = \mathrm{const}$, т. е. также становится неопределенной. В случае 1) получаем ($b = 1$)

$$\psi_i = -\nabla_i\psi, \quad \nabla_i\psi_i = 0, \tag{8}$$

откуда $\Box\psi = 0$. Последнее уравнение известно как уравнение для частицы со спином 0 и с нулевой массой покоя.

---

* Черта обозначает комплексное сопряжение.

** В работе ([2]) утверждается, что все ящики γ_0, соответствующие различным неприводимым представлениям τ, могут быть выбраны произвольно. Это противоречит условиям (3) и (5), т. е. II и III.

Уравнения для частицы со спином 1 можно написать в виде

$$\nabla_k \psi_{ik} + a\psi_i = 0, \quad \nabla_k \psi_i - \nabla_i \psi_k + b\psi_{ik} = 0. \tag{9}$$

Здесь снова могут иметь место прежние три случая. При этом случаи 2) и 3) также приводят к распадению либо к неопределенной системе. Таким образом, и здесь переход от уравнений (1) к уравнениям (2) происходит по существу однозначно. Полагая $a = 0$, $b = 1$, получаем

$$\nabla_k \psi_{ik} = 0, \quad \psi_{ik} = \nabla_i \psi_k - \nabla_k \psi_i. \tag{10}$$

Это — система уравнений Максвелла в вакууме.

Рассмотрим далее систему уравнений (1) следующего вида

$$\nabla_i \psi_i + a\psi = 0, \quad \nabla_i \psi + \nabla_k \psi_{ik} + b\psi_i = 0, \quad \nabla_k \psi_i - \nabla_i \psi_k + c\psi_{ik} = 0. \tag{11}$$

При переходе к уравнениям (2), очевидно, нельзя полагать $c = 0$, так как получим неопределенную или распадающуюся систему. Рассмотрим случай $a = b = 0$, $c = 1$:

$$\nabla_i \psi_i = 0, \quad \nabla_i \psi + \nabla_k \psi_{ik} = 0, \quad \nabla_k \psi_i - \nabla_i \psi_k + \psi_{ik} = 0. \tag{12}$$

Отсюда легко получаем

$$\Box\psi = 0, \quad \Box\psi_i = \nabla_i \psi, \quad \nabla_k \psi_{ik} = -\nabla_i \psi. \tag{13}$$

При наличии векторного поля источников j_i второе из уравнений (12) запишется следующим образом:

$$\nabla_i \psi + \nabla_k \psi_{ik} = \frac{4\pi}{c} j_i, \tag{14}$$

и система (13) переходит в такую:

$$\Box\psi = \frac{4\pi}{c} \nabla_i j_i, \quad \Box\psi_i = -\frac{4\pi}{c}\left(j_i - \frac{c}{4\pi}\nabla_i \psi\right), \quad \nabla_k \psi_{ik} = \frac{4\pi}{c}\left(j_i - \frac{c}{4\pi}\nabla_i \psi\right). \tag{15}$$

Уравнения (12) — (15) во многом аналогичны обычным уравнениям Максвелла. Действительно, для потенциалов ψ_i и поля ψ_{ik} получаются соотношения обычного вида с тем лишь отличием, что роль источников играет сумма $\left(j_i - \frac{c}{4\pi}\nabla_i \psi\right)$. Для уравнений (12) имеет место также градиентная инвариантность, так как подстановка

$$\psi_i' = \psi_i - \nabla_i \varphi, \quad \Box\varphi = 0 \tag{16}$$

оставляет их неизменными. Функция Лагранжа для системы (12)

$$L = \frac{1}{8\pi}\left(2\psi \nabla_i \psi_i + \psi_{ik}(\nabla_k \psi_i - \nabla_i \psi_k) + \frac{1}{2}\psi_{ik}^2\right) \tag{17}$$

и для уравнений Максвелла (10)

$$L = \frac{1}{8\pi}\left(\psi_{ik}(\nabla_k \psi_i - \nabla_i \psi_k) + \frac{1}{2}\psi_{ik}^2\right)^* \tag{18}$$

численно совпадают между собой и равны обычному выражению $-\frac{1}{16\pi}\psi_{ik}^2$.

Преимуществом уравнений (12) является то, что лоренцово условие нормировки потенциалов $\nabla_i \psi_i = 0$ получается из функции Лагранжа и входит в основную систему на равных правах с остальными уравнениями, а не в качестве отдельного независимого условия, как оно

---

* Поля предполагаются вещественными.

всегда вводится. Однако этот результат покупается ценой введения дополнительного скалярного поля ψ, без чего не может быть выполнено условие III. Как следует из первого уравнения (15), свойства поля ψ существенно зависят от того, сохраняется ли заряд или нет, т. е. равно ли $\nabla_i j_i$ нулю. Это наводит на мысль о возможной связи поля ψ со скалярным полем χ пятимерной теории Румера, наличие которого также связано с несохранением заряда ([3], § 7).

Случай, получающийся из системы (11) при $b=0$, $a=c=1$, сводится к только что разобранному путем градиентного преобразования $\psi_i=\psi_i'-\nabla_i\varphi$, $\Box\varphi=\varphi_0$. Наконец, третья и последняя возможность перехода от системы (11) к уравнениям (2) реализуется при $a=0$, соответствующую систему запишем в виде

$$\nabla_i\psi_i=0,\quad \nabla_i\psi+\nabla_k\psi_{ik}+\varkappa^2\psi_i=0,\quad \nabla_k\psi_i-\nabla_i\psi_k+\psi_{ik}=0. \tag{19}$$

Применяя ∇_i ко второму и ∇_k — к третьему из этих уравнений, получаем

$$\Box\psi=0,\quad (\Box-\varkappa^2)\,\psi_i=\nabla_i\psi. \tag{20}$$

Применяя $\Box$ ко второму из уравнений (20), исключаем ψ и получаем

$$\left(1-\frac{1}{\varkappa^2}\Box\right)\Box\psi_i=0. \tag{21}$$

Это не что иное, как уравнение для потенциалов электродинамики Боппа — Подольского в случае вакуума (см., например, [4], § 23). При наличии источников уравнения (19) имеют вид

$$\nabla_i\psi_i=0,\quad \nabla_i\psi+\nabla_k\psi_{ik}+\varkappa^2\psi_i=-\frac{4\pi}{c}j_i,\quad \nabla_k\psi_i-\nabla_i\psi_k+\psi_{ik}=0. \tag{22}$$

Производя над этой системой те же операции, что и над (20), получим

$$\Box\psi=\frac{4\pi}{c}\nabla_i j_i,\quad (\Box-\varkappa^2)\,\psi_i=\nabla_i\psi-\frac{4\pi}{c}j_i. \tag{23}$$

Применение ко второму из этих уравнений операции $\Box$ дает

$$(\Box-\varkappa^2)\,\Box\psi_i=\frac{4\pi}{c}(\nabla_i\nabla_k j_k-\Box j_i). \tag{24}$$

Если предположить, что поле источников j_i удовлетворяет уравнениям для частицы со спином 1 (см., например, [5])

$$\nabla_k j_k=0,\quad (\Box-\varkappa^2)\,j_k=0, \tag{25}$$

то уравнения (25) примут вид

$$\left(1-\frac{1}{\varkappa^2}\Box\right)\Box\psi_i=-\frac{4\pi}{c}j_k. \tag{26}$$

Эти уравнения вместе с первым и третьим из уравнений (22) полностью совпадают с уравнениями теории Боппа — Подольского при наличии источников [4]. Как и в предыдущем примере, здесь необходимым образом появляется дополнительное скалярное поле ψ, обладающее теми же свойствами.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены обобщенные релятивистские уравнения для случая полуцелого спина. В частности, согласно (3), для уравнений Дирака возможен лишь переход к уравнениям $\gamma_k\nabla_k=0$.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
1 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Гельфанд и А. Яглом, ЖЭТФ, 18, 703 (1948). [2] H. J. Bhabha, Rev. Mod. Phys., 21, 451 (1949). [3] Ю. Румер, ЖЭТФ, 19, 86 (1949). [4] Д. Иваненко и А. Соколов, Классическая теория поля, М. — Л., 1949. [5] В. Паули, Релятивистская теория элементарных частиц, М., 1947.