Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Д. З. АВАЗАШВИЛИ

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ДИФФРАКЦИИ МОНОХРОМАТИЧЕСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

(Представлено академиком В. А. Фоком 3 XI 1951)

Полное решение плоской задачи диффракции электромагнитных волн получено В. Д. Купрадзе ([1-3]). Аналогичные результаты получены также Штернбергом ([4]). В. Д. Купрадзе, применяя свой метод к пространственной задаче, построил два интегральных уравнения, однако в его работе ([5]) не приводится полного исследования этих интегральных уравнений. В нашей работе ([6]) доказана теорема единственности пространственной задачи диффракции. В настоящей статье мы устанавливаем теорему существования. В отличие от В. Д. Купрадзе, мы строим интегральные уравнения не для составляющих электромагнитного поля, а для его векторного и скалярного потенциалов.

§ 1. Пусть S — замкнутая поверхность класса BH (см., например, ([1]), гл. I, стр. 14), T_1 — внутренняя конечная область и T_2 — внешняя бесконечная область. Обозначим через $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ электрическую и магнитную составляющие электромагнитного поля.

Как известно ([1]), пространственная задача диффракции сводится к следующей математической задаче:

Требуется определить два вектора $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, удовлетворяющих внутри T_j $(j=1, 2)$ уравнениям:

$$1.\ i\omega\mu_j \mathbf{H} = c \operatorname{rot} \mathbf{E}, \qquad 2.\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$
$$3.\ (\sigma_j - i\omega\varepsilon_j)\mathbf{E} = c \operatorname{rot} \mathbf{H}, \qquad 4.\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \tag{1}$$

на границе раздела S условиям непрерывности касательных составляющих:

$$1.\ (E_S)_1 = (E_S)_2, \qquad 2.\ (H_S)_1 = (H_S)_2, \tag{2}$$

а на бесконечности известным условиям Зоммерфельда.

Здесь ε_j — диэлектрическая постоянная, σ_j — коэффициент проводимости и μ_j — магнитная проницаемость среды, заполняющей область T_j $(j=1, 2)$; ω — частота колебаний падающей монохроматической волны; c — скорость света в пустоте; $(E_S)_1$ и $(E_S)_2$ — предельные значения касательных составляющих вектора $\mathbf{E}$, соответственно, изнутри и снаружи поверхности S.

§ 2. В силу (1, 2) вектор **H** в области T_j ($j=1, 2$) можно искать в виде

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_j} \operatorname{rot} \mathbf{F}, \tag{3}$$

где **F** — вектор потенциала поля. Используя (3), из (1,1) получим

$$\operatorname{rot}\left(\mathbf{E} - \frac{i\omega}{c}\mathbf{F}\right) = 0,$$

откуда следует, что в T_j ($j=1, 2$) вектор **E** представляется в виде:

$$\mathbf{E} = \operatorname{grad}\varphi + \frac{i\omega}{c}\mathbf{F}, \tag{4}$$

где φ — скалярный потенциал поля.

Вектор **F**, введенный в (3), определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции Φ, которую подберем так, чтобы в области T_j выполнялось условие

$$\operatorname{div}\mathbf{F} - \frac{\mu_j(\sigma_j - i\varepsilon_j\omega)}{c}\varphi = 0,$$

или

$$\varphi(M) = \frac{i\omega}{c}\frac{\operatorname{div}\mathbf{F}(M)}{k_j^2}, \quad k_j^2 = \frac{\varepsilon_j\mu_j\omega^2 + i\mu_j\sigma_j\omega}{c^2}. \tag{5}$$

Внесем **H** и **E** из (3) и (4) в (1,1) и используем (5); получим:

$$\Delta\mathbf{F} + k_j^2\mathbf{F} = 0 \text{ в } T_j, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{6}$$

Вводя (4) в (1,4) и используя (5), будем иметь:

$$\Delta\varphi + k_j^2\varphi = 0 \quad \text{в } T_j. \tag{7}$$

Нетрудно показать, что уравнения (7) являются следствием уравнений (6). Действительно, достаточно взять дивергенцию от (6) и воспользоваться условием (5).

Положим $\mu_1 = \mu_2 = 1$ (см., например, ([7-9])), тогда вместо граничных условий (2) получим на S следующие:

$$1.\ (E_S)_1 = (E_S)_2, \qquad 2.\ (\mathbf{H})_1 = (\mathbf{H})_2. \tag{8}$$

В силу (3) условие (8,2) выполнено, если **F** удовлетворяет на S условию $(\operatorname{rot}\mathbf{F})_1 = (\operatorname{rot}\mathbf{F})_2$. В силу (4) условие (8,1) выполнено, если на S имеем $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial S} + \frac{i\omega}{c}F_S\right)_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial S} + \frac{i\omega}{c}F_S\right)_2$. Очевидно, последнее условие всегда имеет место, если на S выполнены граничные условия $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial S}\right)_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial S}\right)_2$, $(F_S)_1 = (F_S)_2$.

Окончательно пространственная задача дифракции электромагнитных волн сводится к двум граничным задачам уравнения колебаний. Для нахождения **F** требуется решить граничную задачу:

$$1.\ \Delta\mathbf{F} + k_2^2\mathbf{F} = 0, \qquad 2.\ \Delta\mathbf{F} + k_1^2\mathbf{F} = 0,$$

$$3.\ (\operatorname{rot}\mathbf{F})_1 = (\operatorname{rot}\mathbf{F})_2, \quad (F_S)_1 = (F_S)_2, \tag{9}$$

$$4.\ \mathbf{F}^* = e^{ik_2r}O(r^{-1}), \quad \frac{\partial\mathbf{F}^*}{\partial r} - ik_2\mathbf{F}^* = e^{ik_2r}o(r^{-1}),$$

где $\mathbf{F}^* = \mathbf{F} - \mathbf{G}$, $\mathbf{G}$ — заданный вектор, удовлетворяющий уравнению колебания $\Delta \mathbf{G} + k_2^2 \mathbf{G} = 0$ в T_j, r — расстояние, $\operatorname{Im} k_2 > 0$.

Определение φ приводит к задаче:

$$1.\ \Delta\varphi + k_2^2 \varphi = 0, \qquad 2.\ \Delta\varphi + k_1^2 \varphi = 0,$$

$$3.\ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial S}\right)_1 = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial S}\right)_2, \tag{10}$$

$$4.\ \varphi^* = e^{ik_2 r} O(r^{-1}), \quad \frac{\partial\varphi^*}{\partial r} - ik_2 \varphi^* = e^{ik_2 r} o(r^{-1}),$$

где $\varphi^* = \varphi - \psi$, ψ — известная функция, удовлетворяющая в T_j уравнению колебания $\Delta\psi + k_2^2 \psi = 0$.

Вычисления показывают, что

$$\psi(M) = \frac{i\omega}{c} \frac{(k_2^2 - k_1^2)}{4\pi k_2^2} \int\limits_S F_n(N) \frac{e^{ik_2 r}}{r} ds + \frac{i\omega}{ck_2^2} \operatorname{div} \mathbf{G}, \tag{11}$$

где F_n — проекция вектора $\mathbf{F}$ на внутреннюю нормаль области T_1.

§ 3. Решения граничных задач (9) и (10) даются, соответственно, интегральными уравнениями:

$$\mathbf{F}(M) = \frac{k_1^2 - k_2^2}{4\pi} \int\limits_{T_1} \mathbf{F}(N) \frac{e^{ik_2 r}}{r} d\tau + \mathbf{G}(M), \tag{12}$$

$$k_j^2(M)\varphi(M) = \frac{k_1^2(k_1^2 - k_2^2)}{4\pi} \int\limits_{T_1} \varphi(N) \frac{e^{ik_2 r}}{r} d\tau + $$

$$+ \frac{k_1^2 - k_2^2}{4\pi} \int\limits_S \varphi(N) \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ik_2 r}}{r}\right) ds + k_2^2 \psi(M), \tag{13}$$

где $k_j^2(M) = k_1^2$ при $M \subset T_1$; $k_j^2(M) = k_2^2$ при $M \subset T_2$; $k_j^2(M) = {}^1/_2(k_1^2 + k_2^2)$ при $M \subset S$.

(12) есть обычное уравнение, а (13) — нагруженное уравнение Фредгольма второго рода. Решая (12) и (13) в T_1 и подставляя найденные функции $\mathbf{F}$ и φ в (12) и (13), найдем их и в T_2.

§ 4. Существование решений уравнений (12) и (13) вытекает из теоремы единственности.

Рассмотрим однородное уравнение, соответствующее (12):

$$\mathbf{F}(M) = (k_1^2 - k_2^2) \int\limits_{T_1} K(M, N) \mathbf{F}(N) d\tau, \tag{14}$$

где $K(M, N) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_2 r(M, N)}}{r(M, N)}$. Покажем, что уравнение (14) имеет только решение $\mathbf{F}(M) \equiv 0$.

Легко проверить, что всякое решение (14) удовлетворяет следующим условиям:

$$1.\ \Delta\mathbf{F} + k_2^2 \mathbf{F} = 0, \qquad 2.\ \Delta\mathbf{F} + k_1^2 \mathbf{F} = 0,$$

$$3.\ (\mathbf{F}_1)_1 = (\mathbf{F})_2, \quad \left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial n}\right)_1 = \left(\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial n}\right)_2, \tag{15}$$

$$4.\ \mathbf{F} = e^{ik_2 r} O(r^{-1}), \quad \frac{d\mathbf{F}}{dr} - ik_2 \mathbf{F} = e^{ik_2 r} o(r^{-1}).$$

Методом, примененным в ([6]), доказывается, что граничная задача (15) имеет только нулевое решение для произвольного σ_j $(j=1, 2)$. Следовательно, (14) имеет лишь нулевое решение.

Теорема существования уравнения (13) доказывается способом В. Д. Купрадзе (([1]), гл. 3, § 17).

Итак, в силу рассуждений § 2, решения уравнений (12) и (13) будут решениями задачи диффракции, если выполнено (5).

Произвольную функцию Φ (см. § 2) теперь подберем так:

$$\operatorname{grad}\Phi = \frac{c\left(k_2^2-k_1^2\right)}{i\omega 4\pi}\int\limits_S \varphi(N)\,\mathbf{n}(N)\frac{e^{ik_2 r}}{r}\,dS, \qquad (16)$$

где $\mathbf{n}(N)$ — орт внутренней нормали в точке $N\subset S$; тогда

$$\mathbf{F}(M) = \frac{k_1^2-k_2^2}{4\pi}\int\limits_{T_1}\mathbf{F}(N)\frac{e^{ik_2 r}}{r}\,d\tau +$$

$$+\frac{c\left(k_2^2-k_1^2\right)}{i\omega 4\pi}\int\limits_S \varphi(N)\,\mathbf{n}(N)\frac{e^{ik_2 r}}{r}\,dS + \mathbf{G}(M). \qquad (17)$$

Вектор (17) опять удовлетворяет всем условиям граничной задачи (9). Очевидно,

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(M) = \frac{k_1^2-k_2^2}{4\pi}\int\limits_{T_1}\operatorname{div}\mathbf{F}(N)\frac{e^{ik_2 r}}{r}\,d\tau +$$

$$+\frac{c\left(k_1^2-k_2^2\right)}{i\omega 4\pi}\int\limits_S \varphi(N)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{ik_2 r}}{r}\right)dS + \frac{k_2^2-k_1^2}{4\pi}\int\limits_S F_n(N)\frac{e^{ik_2 r}}{r}\,dS + \operatorname{div}\mathbf{G}. \qquad (18)$$

Используя (5) и (11), из (17) получим уравнение (13). Найдя $\mathbf{F}$ и φ, мы получим векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ из (3) и (4).

Тбилисский институт
инженеров железнодорожного транспорта
им. В. И. Ленина

Поступило
6 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Д. Купрадзе, Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, 1950. [2] В. Д. Купрадзе, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1 (1937). [3] В. Д. Купрадзе, Compositio Math., 6, 228 (1938). [4] W. Sternberg, ibid., 3, 254 (1936). [5] В. Д. Купрадзе, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 2, 143 (1937). [6] Д. З. Авазашвили, там же, 8, 109 (1940). [7] W. Wien, Encyklopäd. math. Wiss., 5, T. 3, H. 1, S. 109, 1909. [8] Hans Freudenthal, Compositio Math., 6, 221 (1938). [9] T. Delsarte, Ann. Sci. d. l'Ec. Norm. Sup., sér. 3, 53, No. 3 (1936).