Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 1

ТЕПЛОТЕХНИКА

Ю. А. СУРИНОВ

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ О ЛУЧИСТОМ ТЕПЛООБМЕНЕ ДЛЯ СФЕРЫ

(Представлено академиком М. В. Кирпичевым 27 X 1951)

Ниже рассматривается стационарная смешанная задача для сферы, заполненной диатермической средой, с „серой“ поверхностью F, состоящей из двух областей F_1 и F_2 $(F = F_1 + F_2)$. Заданы произвольные непрерывные распределения температур T по области F_1, плотности результативного излучения $E_{\text{рез}}$ по области F_2 и оптических констант A (или R) по всей поверхности F. Требуется определить поля плотностей различных видов излучения как на границе, так и по объему V внутри сферы. Вследствие чрезвычайной простоты конфигурации системы точное решение задачи может быть получено элементарным путем на основании классификации видов излучения, не прибегая к интегральным уравнениям излучения. Весьма существенно, что плотность падающего излучения постоянна по поверхности сферы ($E_{\text{пад}} = \text{const}$), независимо от распределений T, $E_{\text{рез}}$ и R.

Классификация видов излучения [1,2].

1. Плотность эффективного излучения:

$$E_{\text{эф}} = E_c + E_{\text{отр}} = AE_0 + RE_{\text{пад}}. \tag{1}$$

2. Сферический вектор излучения [1]:

$$\mathbf{E}_{4\pi}(M) = \int\limits_{(4\pi)} E_{\text{эф}}(N)\, d\vec{\varphi}(M, s) = \begin{cases} \int\limits_{(F)} E_{\text{эф}}(N)\, \mathbf{r}_1 L(M, N)\, dF_N, & M \in \mathfrak{A}_v \ *, \\ \mathbf{n}_1 E_{\text{эф}}(M) + \int\limits_{(F)} E_{\text{эф}}(N)\, \mathbf{r}_1 L(M, N)\, dF_N, & M \in \mathfrak{A}_F, \end{cases} \tag{2}$$

где $L(M, N) = \cos\theta_N / \pi r_{MN}^2$.

3. Пространственная плотность падающего излучения:

$$\eta_{\text{пад}}(M) = c\, u(M) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{(4\pi)} E_{\text{эф}}(N)\, d\omega(M, s) = \int\limits_{(F)} E_{\text{эф}}(N)\, L(M, N)\, dF_N, \quad M \in \mathfrak{A}_v \ **. \tag{3}$$

---

* Обозначения $M \in \mathfrak{A}_v$ и $M \in \mathfrak{A}_F$ указывают на то, что фиксированная точка M принадлежит в первом случае открытому трехмерному евклидову точечному множеству $\mathfrak{A}_v$ и во втором случае — к двумерному точечному континууму $\mathfrak{A}_F$, образующему границу системы F.

** Функция $\eta_{\text{пад}}$ претерпевает на границе разрыв непрерывности, как потенциал двойного слоя согласно уравнению [4,5]:

4. Поверхностная плотность результативного излучения:

$$E_{\text{рез},n}(M) = (\mathrm{E}_{4\pi}, \mathbf{n}_1) = E_{\text{пад}}^{(+)}(M, n) - E_{\text{пад}}^{(-)}(M, n), \quad M \in \mathfrak{A}_v, \tag{4}$$

$$E_{\text{рез}}(M) = E_{\text{пад}}(M) - E_{\text{эф}}(M) = A(M)\,[E_{\text{пад}}(M) - E_0(M)], \quad M \in \mathfrak{A}_F. \tag{4a}$$

5. Поверхностная плотность падающего излучения:

$$E_{\text{пад}}(M, n) = \int\limits_{(2\pi)} E_{\text{эф}}(N)\, d\varphi_n(M, N), \quad M \in \mathfrak{A}_{v+F}; \tag{5}$$

$$d\varphi_n(M, N) = K(M, n, N)\, dF_N = \frac{\cos\theta_M \cos\theta_N}{\pi r_{MN}^2}\, dF_N. \tag{6}$$

На основании (4а) в данном случае сферы получаем [2]

$$E_{\text{пад}} = \frac{E_{\text{рез}}(M_2)}{A(M_2)} + E_0(M_2) = \frac{E_{\text{рез}}(M_1)}{A(M_1)} + E_0(M_1) = \text{const}. \tag{7}$$

Воспользуемся далее формулой Остроградского:

$$\oint\limits_{(F)} (\mathrm{E}_{4\pi}, \mathbf{n}_1)\, dF = \oint\limits_{(F)} E_{\text{рез}}(N)\, dF_N = \int\limits_{(F_1)} E_{\text{рез}}(N_1)\, dF_{N_1} + \int\limits_{(F_2)} E_{\text{рез}}(N_2)\, dF_{N_2} = 0, \tag{8}$$

или, на основании (4а),

$$Q_{\text{рез},1} = -Q_{\text{рез},2} = \int\limits_{(F_1)} E_{\text{рез}}(N_1)\, dF_{N_1} = F_1(\overline{A}_1 E_{\text{пад}} - \overline{E}_{c,1}), \tag{9}$$

где $\overline{A}_1$ и $\overline{E}_{c,1}$ — средние значения A и E_c по области F_1, равные:

$$\overline{A}_1 = \frac{1}{F_1}\int\limits_{(F_1)} A(N_1)\, dF_{N_1}, \qquad \overline{E}_{c,1} = \frac{1}{F_1}\int\limits_{(F_1)} E_c(N_1)\, dF_{N_1}. \tag{10}$$

Из (9), учитывая (7), находим:

$$E_{\text{пад}} = \frac{1}{\overline{A}_1}\left(\overline{E}_{c,1} - \frac{Q_{\text{рез},2}}{F_1}\right) = \frac{1}{\overline{A}_1 F_1}(Q_{c,1} - Q_{\text{рез},2}), \quad Q_{c,1} = \overline{E}_{c,1}F_1; \tag{11}$$

$$E_0(M_2) = \sigma_0\,[T(M_2)]^4 = \frac{1}{\overline{A}_1}\left(\overline{E}_{c,1} - \frac{Q_{\text{рез},2}}{F_1}\right) - \frac{E_{\text{рез}}(M_2)}{A(M_2)}. \tag{12}$$

Выражение (12) в развернутом виде запишется так:

$$E_0(M_2) = \frac{\int\limits_{(F_1)} E_c(N_1)\, dF_{N_1} - \int\limits_{(F_2)} E_{\text{рез}}(N_2)\, dF_{N_2}}{\int\limits_{(F_1)} A(N_1)\, dF_{N_1}} - \frac{E_{\text{рез}}(M_2)}{A(M_2)}. \tag{12a}$$

$$E_{\text{эф}}(M) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(F)} E_{\text{эф}}(N)\, d\omega = \frac{1}{2}\eta_{\text{пад}}(M) \text{ или } \eta_{\text{пад}}(M_i) = 2E_{\text{эф}}(M) + \eta_{\text{пад}}(M),$$

где M — точка на поверхности и M_i — бесконечно близкая внутренняя точка.

Подставляя в (4а) значение $E_{\text{пад}}$, получим:

$$E_{\text{рез}}(M_1) = \frac{A(M_1)}{\overline{A}_1 F_1} \left\{ \int_{(F_1)} A(N_1)[E_0(N_1) - E_0(M_1)]\, dF_{N_1} - \int_{(F_2)} E_{\text{рез}}(N_2)\, dF_{N_2} \right\},$$

$$M_1 \in \mathfrak{A}_{F_1}. \tag{13}$$

Определение $\mathbf{E}_{4\pi}$, $E_{\text{рез}}$ и $\eta_{\text{пад}}$ во внутренних точках поля. Подставляя в (2) значение $E_{\text{эф}}$ согласно (1) и учитывая (10), находим:

$$\mathbf{E}_{4\pi}(M) = \int_{(F_1)} E_c(N)\, d\vec{\varphi}(M, N_1) - \int_{(F_2)} E_{\text{рез}}(N_2)\, d\vec{\varphi}(M, N_2) +$$

$$+ E_{\text{пад}} \left[\vec{\varphi}(M, F_2) + \int_{(F_1)} R(N_1)\, d\vec{\varphi}(M, N_1) \right], \tag{14}$$

где $\vec{\varphi}(M, F_2)$ — геометрический вектор излучения, создаваемый областью F_2:

$$\vec{\varphi}(M, F_2) = \int_{(F_2)} d\vec{\varphi}(M, N_2) = \int_{(F_2)} \mathbf{r}_1 L(M, N_2)\, dF_{N_2}{}^*. \tag{15}$$

Пользуясь далее уравнением замкнутости системы вида

$$\vec{\varphi}(M, F_1) = -\vec{\varphi}(M, F_2) = \int_{(F_1)} d\vec{\varphi}(M, N_1), \tag{16}$$

получим:

$$\mathbf{E}_{4\pi}(M) = \int_{(F_1)} A(N_1)\, [E_0(N_1) - E_{\text{пад}}]\, d\vec{\varphi}(M, N_1) -$$

$$- \int_{(F_2)} E_{\text{рез}}(N_2)\, d\vec{\varphi}(M, N_2), \quad M \in \mathfrak{A}_v \tag{17}$$

или

$$\mathbf{E}_{4\pi}(M) = \frac{1}{\overline{A}_1 F_1} \left\{ \int_{(F_1)} \int_{(F_2)} A(N_1) A(P_1)\, [E_0(N_1) - E_0(P_1)]\, d\vec{\varphi}(M, N_1)\, dF_{P_1} - \right.$$

$$\left. - \int_{(F_1)} \int_{(F_2)} \mathbf{r}_1 A(N_1) E_{\text{рез}}(N_2)\, [K(M, n, N_2) - K(M, n, N_1)]\, dF_{N_2} dF_{N_1} \right\}. \tag{17a}$$

Для $E_{\text{рез}}$ соответственно получаем:

$$E_{\text{рез}, n}(M) = (\mathbf{E}_{4\pi}, \mathbf{n}_1) = \int_{(F_1)} A(N_1)\, [E_0(N_1) - E_{\text{пад}}]\, d\varphi_n(M, N_1) -$$

$$- \int_{(F_2)} E_{\text{рез}}(N_2)\, d\varphi_n(M, N_2), \quad M \in \mathfrak{A}_v. \tag{18}$$

Выражение для $\eta_{\text{пад}}$ получим аналогично, подставляя в (3) значение $E_{\text{эф}}$ согласно (1) и осуществляя несложные преобразования:

$$\eta_{\text{пад}}(M) = \frac{1}{\pi} \int_{(F_1)} E_c(N_1)\, d\omega(M, N_1) - \frac{1}{\pi} \int_{(F_2)} E_{\text{рез}}(N_2)\, d\omega(M, N_2) +$$

$$+ \frac{E_{\text{пад}}}{\pi} \left[\omega(M, F_2) + \int_{(F_1)} R(N_1)\, d\omega(M, N_1) \right], \tag{19}$$

---

* Проекция вектора $\vec{\varphi}(M, F_2)$ на произвольное направление $\mathbf{n}$, выходящее из точки M, представляет собой результативный локальный угловой коэффициент излучения $\varphi_{\text{рез}, n}(M, F_2)$: $\varphi_{\text{рез}, n}(M, F_2) = \vec{\varphi}(M, F_2), \mathbf{n}_1 = \int_{(F_2)} d\varphi_n(M, N_2)$.

или, так как

$$\omega(M, F_2) = \int\limits_{(F_2)} d\omega(M, N_2) = \int\limits_{(F_2)} \frac{\cos\theta_{N_2}}{r_{MN}^2} dF_{N_2} = 4\pi - \int\limits_{(F_1)} d\omega(M, N_1), \quad (20)$$

получаем:

$$\eta_{\text{пад}}(M) = cu(M) = 4E_{\text{пад}} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{(F_1)} A(N_1)\,[E_0(N_1) - E_{\text{пад}}]\,d\omega(M, N_1) - \\ - \frac{1}{\pi}\int\limits_{(F_2)} E_{\text{рез}}(N_2)\,d\omega(M, N_2), \quad M \in \mathfrak{A}_v. \quad (21)$$

Частные случаи. 1. Предположим, что область F_2 является адиабатической. Тогда $E_{\text{пад}}(M_2) = E_{\text{эф}}(M_2) = E_0(M_2) = \text{const}$, и, следовательно, на основании (17а) и (21), получим [3]:

$$\mathbf{E}_{4\pi}(M) = \frac{1}{\overline{A}_1 F_1}\int\limits_{(F_1)}\int\limits_{(F_1)} A(N_1)\,A(P_1)\,[E_0(N_1) - E_0(P_1)]\,d\vec{\varphi}(M, N_1)\,dF_{P_1}, \quad (22)$$

$$\eta_{\text{пад}}(M) = 4E_{0,2} + \frac{1}{\pi\overline{A}_1 F_1}\int\limits_{(F_1)}\int\limits_{(F_1)} A(N_1)\,A(P_1)\,[E_0(N_1) - E_0(P_1)] \times \\ \times d\omega(M, N_1)\,dF_{P_1}, \quad M \in \mathfrak{A}_v. \quad (23)$$

2. Предположим, что область F_1 сферы состоит из n_1 однородных и изотермических зон и область F_2 (неадиабатическая) — из n_2 однородных зон, для каждой из которых $E_{\text{рез},\,j} = \text{const}$ *. В этом случае получим:

$$\mathbf{E}_{4\pi}(M) = \sum_{k=1}^{n_1} A_k\,(E_{0,\,k} - E_{\text{пад}})\,\vec{\varphi}(M, F_k) - \sum_{j=1}^{n_2} E_{\text{рез},\,j}\,\vec{\varphi}(M, F_j), \quad M \in \mathfrak{A}_v; \quad (24)$$

$$\eta_{\text{пад}}(M) = cu\,(M) = 4E_{\text{пад}} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n_1} A_k\,(E_{0,\,k} - E_{\text{пад}})\,\omega(M, F_k) - \\ - \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n_2} E_{\text{рез},\,j}\,\omega(M, F_j), \quad M \in \mathfrak{A}_v. \quad (25)$$

В качестве тривиального частного случая рассмотрим смешанную задачу для сферы, состоящей из трех зон, из которых одна (зона 2) является адиабатической, а две другие изотермическими.

$$\mathbf{E}_{4\pi}(M) = A_1 A_3 \frac{[F_3\vec{\varphi}(M, F_1) - F_1\vec{\varphi}(M, F_3)]}{\overline{A}_1 F_1 + A_3 F_3} E_{13}; \quad E_{13} = E_{0,1} - E_{0,3}; \quad (26)$$

$$\eta_{\text{пад}}(M) = cu\,(M) = 4E_{0,\,2} + \frac{A_1 A_3\,[F_3\omega(M, F_1) - F_1\omega(M, F_3)]}{\pi\,(A_1 F_1 + A_3 F_3)} E_{13}. \quad (27)$$

Выше были определены все основные характеристики поля излучения **. В заключение заметим, что постановка данной задачи возникла из потребностей теплотехнических приложений теории теплового излучения.

Поступило
17 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Суринов, ДАН, 62, № 3 (1950). [2] Ю. А. Суринов, Изв. АН СССР, ОТН, № 7 (1948). [3] Ю. А. Суринов, Изв. АН СССР, ОТН, № 4 (1950). [4] С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, 1949. [5] Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, 1946.

* Числа n_1 и n_2 предполагаются конечными.

** Кроме яркости $B(M, s)$, которая в данном случае системы серых тел, разделенных диатермической средой, и стационарной задачи определяется тривиально на основании соотношения $B(M, s) = B_{\text{эф}}(N, s) = E_{\text{эф}}(N)/\pi$, так как внутри системы яркость является лишь функцией направления, а на границе, на основании закона Ламберта, только функцией точки [1].