

Л. И. КАМЫНИН

**РАЗЛИЧИЕ ТЕОРЕМ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ
ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И СИСТЕМ КОНЕЧНОРАЗНОСТНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 6 XI 1951)

Решение уравнения теплопроводности

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1)$$

для неограниченной области изменения переменного x методом конечных разностей приводит к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_n}{dt} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 2, \dots \quad (2)$$

А. Н. Тихонов доказал ⁽¹⁾ единственность решения (1), если для него существуют такие c и t_0 , что

$$\max_{0 < t < t_0} u(x, t) e^{-cx^2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow -\infty.$$

В настоящей заметке показывается, что для неединственности решения (2) требуются меньшие ограничения на его рост, что имеет принципиальное значение для применимости метода конечных разностей к решению уравнения теплопроводности.

Теорема. Пусть дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{du_n}{dt} = f_n(t; u_{n-r}, \dots, u_{n+r}), \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

(где $r > 0$ постоянное целое число), правые части которых удовлетворяют следующим условиям:

1. $f_n(t; u_{n-r}, \dots, u_{n+r})$ определены при любых u_m и $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.
2. $f_n(t; u_{n-r}, \dots, u_{n+r})$ измеримы по t для фиксированных u_m , причем

$$\int_{t_0}^{t_0+T} |f_n(t; 0, \dots, 0)| dt \leq A \left[p \frac{|n|}{r} \right]!,$$

где A и p ($0 < p < 1$) постоянные.

3. $f_n(t; u_{n-r}, \dots, u_{n+r})$ удовлетворяют условию Липшица:

$$|f_n(t; u''_{n-r}, \dots, u''_{n+r}) - f_n(t; u'_{n-r}, \dots, u'_{n+r})| \leq K \sum_{\alpha=n-r}^{n+r} |u''_{\alpha} - u'_{\alpha}|$$

для всех $t: t_0 \leq t \leq t_0 + T$, причем K — постоянная.

Тогда система (3) имеет по меньшей мере одно решение $u_m(t)$, $m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющее начальным данным $u_m(t_0) = u_m^0$, $m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, если только $|u_m^0| \leq B \left[p \frac{|m|}{r} \right]!$, где B — постоянная.

Всякое решение системы (3), удовлетворяющее условиям $u_m(t_0) = u_m^0$, $m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, и $|u_m(t)| \leq C \left[p \frac{|m|}{r} \right]!$ при $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ (C — постоянная) единственно.

Теорема доказывается методом последовательных приближений.

Следствие 1. Если $u_{m_1 \dots m_q}(t)$ есть решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{du_{m_1 \dots m_q}}{dt} = \sum_{\alpha_1=m_1+r_1}^{m_1-r_1} \sum_{\alpha_2=m_2+r_2}^{m_2-r_2} \dots \sum_{\alpha_q=m_q+r_q}^{m_q-r_q} a_{m_1 \dots m_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_q} u_{\alpha_1 \dots \alpha_q} \quad (4)$$

$$m_i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots, q,$$

удовлетворяющее нулевым начальным данным $u_{m_1 \dots m_q}(0) = 0$, причем выполнено соотношение $|u_{m_1 \dots m_q}(t)| = O \left(\left[p \min_{i=1, 2, \dots, q} \frac{|m_i|}{r_i} \right]! \right)$, где p — постоянная ($0 < p < 1$) и $0 \leq t \leq T$, то $u_{m_1 \dots m_q}(t) \equiv 0$, если $|a_{m_1 \dots m_q}^{\alpha_1 \dots \alpha_q}| \leq c < +\infty$, $n_i = m_i + r_i, \dots, m_i - r_i$; $m_i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$; $i = 1, 2, \dots, q$; c — постоянная.

Решение уравнений теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^q \frac{\partial^{2r_i} u}{\partial x_i^{2r_i}}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^{2r} u}{\partial x^{2r}} \quad (6)$$

для неограниченных областей изменения x_i ($i = 1, 2, \dots, q$) методом конечных разностей приводит к бесконечным системам обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{du_{m_1 \dots m_q}}{dt} = \sum_{i=1}^q \sum_{k_i=0}^{2r_i} (-1)^{k_i} C_{2r_i}^{k_i} u_{m_1 \dots m_{i-1} m_i+k_i-r_i m_{i+1} \dots m_q}, \quad (5')$$

$$m_i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots, q;$$

$$\frac{du_n}{dt} = \sum_{k=0}^{2r} (-1)^k C_{2r}^k u_{n+k-r}, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \quad (6')$$

Следствие 2. Доказанная теорема единственности имеет место для систем конечноразностных дифференциальных уравнений (5'), (6') и (2), если только их решения удовлетворяют, соответственно, условиям

$$|u_{m_1 \dots m_q}(t)| = O \left(\left[p \min_{i=1, 2, \dots, q} \frac{|m_i|}{r_i} \right]! \right), \quad (5'')$$

$$|u_n(t)| = O \left(\left[p \frac{|n|}{r} \right]! \right), \quad (6'')$$

$$|u_n(t)| = O([p|n|]!), \quad (2')$$

причем p — постоянная ($0 < p < 1$) и $0 \leq t \leq T$.

Следствие 3. Для того чтобы

$$u_n(t) = \frac{\alpha_n}{\pi} \int_0^\pi e^{(-4 \sin^2 \frac{x}{2})^r t} dx + \\ + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha_{n+k} + \alpha_{n-k}) \int_0^\pi \cos kx \cdot e^{(-4 \sin^2 \frac{x}{2})^r t} dx, \quad n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots,$$

было решением системы (6'), принимающим начальные данные $u_n(0) = \alpha_n$, достаточно выполнения соотношения $|\alpha_n| \leq L \left[p \frac{|n|}{r} \right]!$, где p и L — постоянные, причем $0 < p < 1/2$.

Всякое решение $V_n(t)$ системы (6'), удовлетворяющее тем же начальным данным, совпадает с указанным решением, если только $|V_n(t)| = O([q|n|]!)$, где q — постоянная, $0 < q < 1$ и $0 \leq t \leq T$.

Замечание. Если $r = 1$, то

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos nx \cdot e^{-4t \sin^2 \frac{x}{2}} dx = e^{-2t} I_n(2t),$$

где $I_n(t)$ есть функция Бесселя от мнимого аргумента.

Рассмотрим наряду с системой (5') системы

$$\frac{du_j^j}{dt} = \sum_{h_j=0}^{2r_j} (-1)^{h_j} C_{2r_j}^{h_j} u_{n+h_j-r_j}^j, \quad (6'_j)$$

$$n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots; \quad j = 1, 2, \dots, q.$$

Если $u_m^j(t)$ решение (6'_j), то $u_{m_1 \dots m_q}(t) = \prod_{j=1}^q u_{m_j}^j(t)$ есть решение (5'), поэтому для построения решения системы (5'), удовлетворяющего нулевым начальным данным, но не равного нулю тождественно, достаточно построить таковое для системы (6').

Функции $u_n(t)$, $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, заданные равенствами

$$u_n(t) = \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor} \frac{\prod_{k=1}^{r\nu} (n+k)}{(2r\nu+1)!} F^{(\nu)}(t),$$

$$u_0(t) \equiv 0, \quad (7)$$

$$u_{-n}(t) = - \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor} \frac{\prod_{k=1}^{r\nu} (n+k)}{(2r\nu+1)!} F^{(\nu)}(t), \quad n = 1, 2, \dots,$$

являются решением системы (6').

Выберем $F(t)$ так, чтобы выполнялись соотношения:

$$1^\circ F^{(\nu)}(t)|_{t=0} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots$$

$$2^\circ F(t) \not\equiv 0.$$

Это возможно (1).

Утверждение. Для любого $q > 1$ существует ненулевое решение $u_n(t)$, $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, системы (6'), удовлетворяющее нулевым начальным данным, такое, что $|u_n(t)| = O\left(\left[q \frac{|n|}{r}\right]!\right)$.

Для построения $u_n(t)$ достаточно в (7) выбрать $F(t)$ такой, чтобы $|F^{(n)}(t)| < [q^n n]!$, где $1 < q' < q$ и $0 \leq t \leq T$ (1).

Различие теорем единственности для уравнения теплопроводности и соответствующей системы конечноразностных дифференциальных уравнений не дает возможности применять метод конечных разностей для решения уравнения теплопроводности (1), если $\varphi(x)$ в начальном условии $u(x, 0) = \varphi(x)$ есть функция, которая, хотя и обеспечивает единственность решения уравнения (1), но допускает неединственность при решении соответствующей конечноразностной системы дифференциальных уравнений (2).

В качестве такой функции можно взять $\varphi(x) = u_n(0) + (x - n) \times (u_{n+1}(0) - u_n(0))$; $n \leq x \leq n + 1$; $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$; $u_n(t) \equiv \bar{u}_n(t + t_0)$, где $\bar{u}_n(t)$ есть решение системы (2), данное равенством (7), такое, что $|\bar{u}_n(t)| = O([q^n n]!)$, причем $q > 1$ постоянная. Очевидно,

$\max_{n < x < n+1} |\varphi(x)| = O(e^{q^n n} \ln q^n)$. Если $u(x, t)$ — соответствующее решение (1), то $\max_{0 \leq t < T} u(x, t) e^{-q^2 x^2} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$, т. е. $u(x, t)$

согласно (1) — единственное решение (1). Система же (2) имеет по меньшей мере два решения $u_n(t)$ и $u_n(t) + \bar{u}_n(t)$, удовлетворяющие условию $u_n(0) = \varphi(n)$.

Далее, в силу доказанной теоремы единственности для системы (4) при решении уравнения теплопроводности (5) на q -мерной плоскости ($q \geq 2$) методом конечных разностей существенное значение для единственности решения соответствующей системы (5') имеет выбор направления осей сетки.

Так, при повороте сетки на угол ψ без изменения первоначальных узлов сетки соответствующая уравнению $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ система

$$\begin{aligned} \frac{du_{nm}}{dt} &= u_{n+1m} - 2u_{nm} + u_{n-1m} + u_{nm+1} - 2u_{nm} + u_{nm-1}; \\ m, n &= \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5'')$$

при $\operatorname{tg} \psi = 1/2$ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{du_{nm}}{dt} &= 1/5 (u_{n+2m+1} - 2u_{nm} + u_{n-2m-1} + u_{n-1m+2} - 2u_{nm} + u_{n+1m-2}), \\ m, n &= \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5''')$$

и вместо условия $|u_{nm}(t)| = O([p \min(|n|, |m|)]!)$ для единственности решения системы (5''') потребуются условие $|u_{nm}(t)| = O\left([p \min\left(\frac{|n|}{2}, \frac{|m|}{2}\right)]!\right)$, где $0 < p < 1$.

Ввиду указанной «анизотропии» оси сеток в этом случае следует выбирать либо параллельными координатным осям, либо наклоненными к ним под углом 45° .

В заключение автор выражает глубокую благодарность акад. С. Л. Соболеву за руководство и помощь.

Поступило
17 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Н. Тихонов, Матем. сборн., 42, 2, 199 (1935).