Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 1

МАТЕМАТИКА

О. С. ИВАШЕВ-МУСАТОВ

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ — СТИЛЬТЬЕСА СИНГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 XI 1951)

Пусть $F(x)$ — непрерывная, монотонная и сингулярная функция. Как известно, ее коэффициенты Фурье — Стильтьеса

$$c_n = \int_0^{2\pi} e^{-inx}\, dF(x)$$

таковы, что ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^2 \tag{1}$$

расходится.

Вопрос о возможном порядке убывания c_n изучали Литтльвуд [1], Винер и Винтнер [2], Шеффер [3]. Наиболее сильный результат Шеффера состоит в том, что для любой положительной функции $r(x)$, стремящейся к бесконечности при $x \to \infty$, можно построить такую функцию $F(x)$, что

$$c_n = O\left(\frac{r(|n|)}{\sqrt{|n|}}\right).$$

В настоящей работе устанавливается, что коэффициенты могут иметь порядок

$$\frac{1}{\sqrt{|n|}}, \quad \frac{1}{\sqrt{|n| \ln |n|}}, \quad \frac{1}{\sqrt{|n| \ln |n| \ln \ln |n|}} \tag{2}$$

и т. д.

Теорема 2 говорит больше: в известном смысле слова она означает, что ряд (1) может расходиться как угодно медленно.

Одновременно решается вопрос о возможном виде преобразования Фурье — Стильтьеса сингулярных функций (теорема 3).

Основная идея доказательства теорем 2 и 3 сначала демонстрируется на решении более простой задачи. Если рассматривать на всей прямой функции с интегрируемым квадратом, то преобразование Фурье не выводит за пределы этого класса функций. С другой стороны, две функции, связанные преобразованием Фурье, находятся во взаимно-однозначном соответствии для значительно более обширного класса функций [4]. В теореме 1 показано, что преобразование Фурье функции, постоянной по модулю, может иметь интеграл квадрата, расходящийся как угодно медленно.

Теорема 1. *Пусть на полупрямой задана непрерывная, монотонная, положительная функция* $\chi(x)$, *для которой*:

1) $\chi(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$,

2) *существуют такие* $\theta > 1$ *и* A, *что для всех* x

$$\frac{\chi(x)}{\chi(\theta x)} < A;$$

3) $\psi(y) = \int_0^y \chi^2(x)\,dx \to \infty$ *при* $y \to \infty$.

Тогда существует такая функция $F(x)$, *что*

а) $|F(x)| = 1$,

б) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,e^{-iyx}\,dx = 0\ (\chi(|y|))$.

Функция $F(x)$ строится следующим образом. Пусть $\overline{\psi}(x)$ — функция, обратная к $\psi(x)$. Положим

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^x \overline{\psi}(t)\,dt & \text{при } x \geqslant 0, \\ f(-x) & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Тогда $F(x) = e^{if(x)}$.

Теорема 2. *Пусть на полупрямой задана монотонная, дифференцируемая и положительная функция* $\chi(x)$, *для которой:*

1) $\psi(y) = \int_0^y \chi^2(x)\,dx \to \infty$ *при* $y \to \infty$;

2) *для любого* $\varepsilon > 0$ *имеем* $x^{1+\varepsilon}\chi^2(x) \to \infty$ *при* $x \to \infty$;

3) $x\chi^2(x) \to 0$ *при* $x \to \infty$;

4) *для любого* $\theta \geqslant 1$ *и всех* x

$$\frac{\chi(x)}{\chi(\theta x)} \sqrt{\frac{\psi(\theta x) + 1}{\psi(x) + 1}} \leqslant \theta.$$

Тогда существует функция $F(x)$, *которая удовлетворяет требованиям:*

а) $F(x)$ *определена на* $[0, 2\pi]$, *непрерывна и монотонно не убывает;*

б) $\int_0^{2\pi} e^{-inx}\,dF(x) = O(\chi(|n|))$;

в) $F'(x) = 0$ *почти всюду.*

Заметим, что условия 1) — 4) выполнены для функций типа (2). Функция $F(x)$, удовлетворяющая требованиям теоремы, строится следующим образом. Обозначим

$$\chi_1(x) = \frac{\chi(x)}{\sqrt{\psi(x) + 1}}.$$

Пусть $\overline{\psi}(x)$ — функция, обратная к

$$\psi_1(x) = \int_0^x \chi_1^2(t)\,dt.$$

Положим

$$f(x)=\int_0^x \bar{\psi}(t)\,dt.$$

Выберем столь быстро возрастающую последовательность чисел $\{d_k\}$, что:

$$\alpha_1)\quad \frac{f'(d_k+2\pi)}{f'(d_{k+1})}<\frac{1}{16^k};$$

$$\alpha_2)\quad \psi_1(d_k)>1000\cdot 4^k;$$

$\alpha_3)$ для всех $y\geqslant d_k$

$$4^{k+1}f'(d_{k-1}+2\pi)<\frac{f'(y)}{\sqrt{f''(y)}};$$

$\alpha_4)$ для всех $y\geqslant d_k$

$$4f'(d_{k-1}+2\pi)<\frac{f''(y)}{f'(y)};$$

$$\alpha_5)\quad \cos f(d_1)=-1.$$

Обозначим

$$Q_n(x)=\prod_{k=1}^{n}(1+\cos f(d_k+x)) \quad \text{и} \quad F_n(x)=\int_0^x Q_n(t)\,dt,$$

где $x\in[0,2\pi]$. Последовательность непрерывных и монотонно возрастающих функций $F_n(x)$ сходится на $[0,2\pi]$ равномерно, т. е. определяет некоторую непрерывную и монотонно не убывающую функцию $F(x)$. Построенная функция удовлетворяет всем условиям теоремы.

Теорема 3. *Пусть на полупрямой задана монотонная, положительная и дифференцируемая функция $\chi(x)$, для которой*

1) $\psi(y)=\int_0^y \chi^2(x)\,dx\to\infty$ *при* $y\to\infty$;

2) *для любого* $\theta\geqslant 1$ *и всех* x

$$\frac{\chi(x)}{\chi(\theta x)}\sqrt{\frac{\psi(\theta x)+1}{\psi(x)+1}}\leqslant\theta;$$

3) $x\chi^2(x)\to 0$ *при* $x\to\infty$;

4) *для любого* $\varepsilon>0$ *имеем* $x^{1+\varepsilon}\chi^2(x)\to\infty$ *при* $x\to\infty$.

Тогда существует функция $F(x)$, удовлетворяющая требованиям:

а) $F(x)$ *определена на* $[0,2\pi]$, *непрерывна и монотонно не убывает;*

б) $\int_0^{2\pi} e^{-iyx}\,dF(x)=O(\chi(|y|))$;

в) $F'(x)=0$ *почти всюду.*

Функция $F(x)$, удовлетворяющая всем условиям теоремы, строится так же, как и в теореме 2.

Поступило
16 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. E. Littlewood, Quart. Journ. Math., 7, 219 (1936). [2] N. Wiener and A. Wintner, Am. Journ. Math., 40, 513 (1938). [3] A. C. Schaeffer, ibid., 61, 934 (1939). [4] Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, 1948.