Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 1

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. А. СВЕКЛО

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФФРАКЦИИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 25 XII 1951)

Рассматривается однородная изотропная упругая плоскость со щелью $y=0$, $x>0$, составленная из двух полуплоскостей $y \gtrless 0$, имеющих различные упругие свойства, с границей раздела $y=0$, $x<0$. При $t<0$ в сторону возрастания x движется линейно-поляризованная волна, состоящая из совокупности падающей, отраженной и преломленной плоских волн:

$$u_1 = S\left(t - \theta_0 x - \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta_0^2}\, y\right),$$

$$u_2 = A_0 S\left(t - \theta_0 x + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta_0^2}\, y\right), \tag{1}$$

$$u_3 = B_0 S\left(t - \theta_0 x - \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta_0^2}\, y\right),$$

где a — скорость распространения волны в среде $y<0$; b — скорость распространения волны в среде $y>0$. Считаем для определенности $a>b$. Постоянные A_0 и B_0 находятся из условия сопряжения полуплоскостей:

$$A_0 = \frac{\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_0^2} - \sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta_0^2}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_0^2} + \sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta_0^2}}, \qquad B_0 = \frac{2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_0^2}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_0^2} + \sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta_0^2}}.$$

$S(\zeta)$ — разрывная функция, равная нулю при $\zeta<0$ и равная единице при $\zeta \geqslant 0$. Решение (1) считается, таким образом, элементарным. Общий случай нестационарной плоской волны может быть получен наложением элементарных волн. В момент времени $t=0$ волна (1) достигает острия щели 0. Требуется найти диффракционное возмущение, сосредоточенное к моменту времени t $(t>0)$ внутри области, ограниченной контуром $ABCEFGOA$ (рис. 1), при условии, что края щели жестко заделаны.

Введем в рассмотрение переменные θ_1 и θ_2, определенные соотношениями:

$$t - \theta_1 x + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta_1^2}\, y = 0, \qquad t - \theta_2 x + \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta_2^2}\, y = 0, \tag{2}$$

где под радикалами $\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta_1^2}$ и $\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta_2^2}$ понимаются ветви, принимающие положительные значения на верхних берегах разрезов $-\frac{1}{a}<\theta_1<\frac{1}{a}$, $-\frac{1}{b}<\theta_2<\frac{1}{b}$. Решение внутри полукруга $OEFGO$ представляется тогда в форме $u_1(x, y, t) = \mathrm{Re}\, u_1(\theta_1)$, а внутри полукруга $OABCDO$ в виде $u_2(x, y, t) = \mathrm{Re}\, u_2(\theta_2)$, где ограниченные на бесконечности аналитические функции $u_1(\theta_1)$ и $u_2(\theta_2)$ определены, соответственно, в верхней и нижней полуплоскостях своих комплексных аргументов.

Если $y = 0$, то $\theta_1 = \theta_2 = \theta$. Из закона соответствия между точками плоскости XOY и значениями переменных θ_1 и θ_2, а также из краевых условий следует, что $\mathrm{Re}\, u_1(\theta) = \mathrm{Re}\, u_2(\theta)$ для $\theta > 1/k = \theta_0$, где $1/k$ — значение θ, соответствующее точкам B и F плоскости XOY.

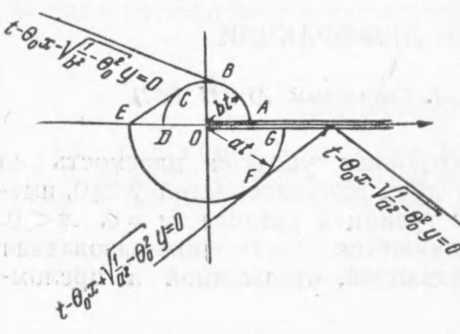

Рис. 1

В точках полуоси $y = 0$, $x < 0$ имеют место условия сопряжения:

$$u_1(x, 0, t) = u_2(x, 0, t),$$

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=0},$$

выражающие тот факт, что смещения и напряжения должны оставаться непрерывными при переходе через границу раздела среды. С помощью переменной θ эти соотношения записываются в форме:

$$\mathrm{Re}\, u_1(\theta) = \mathrm{Re}\, u_2(\theta), \quad \mathrm{Re}\sqrt{\frac{1}{a^2}-\theta^2}\, u_1'(\theta) = \mathrm{Re}\sqrt{\frac{1}{b^2}-\theta^2}\, u_2'(\theta). \qquad (3)$$

Обозначим через S^+ верхнюю, а через S^- — нижнюю полуплоскости и введем кусочно-голоморфную функцию

$$\Omega(\theta) = \begin{cases} u_1(\theta), & \text{если } \theta \in S^+, \\ u_2(\theta), & \text{если } \theta \in S^-. \end{cases}$$

В силу краевых условий, а также первого из условий сопряжения (3), $\bar{u}_2(\theta) = \bar{u}_1(\theta)$, т. е. функции $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$ являются комплексно-сопряженными. Но тогда из второго условия (3), в силу выбора ветвей радикалов, следует, что для значений $\theta < -1/b$ функции $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$ различаются на чисто мнимую постоянную. Поскольку, как это видно из краевых условий и условий сопряжения, функции $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$ вообще могут быть определены лишь с точностью до произвольных чисто мнимых постоянных, то, отбрасывая эту постоянную, можем считать для всех вещественных значений θ, удовлетворяющих неравенству $\theta < -1/b$, $u_1(\theta) = u_2(\theta)$, т. е. функция $\Omega(\theta)$ оказывается аналитически продолжимой на участке действительной оси $\theta < -1/b$.

Задача, таким образом, сводится к определению исчезающей на бесконечности аналитической функции $\Omega(\theta)$, определенной на всей плоскости комплексного аргумента θ с разрезом вдоль действительной оси $\theta > -1/b$. Краевые условия для функции $\Omega(\theta)$ указаны на рис. 2.

Вещественная функция $f(\theta)$, определенная на участке $-1/b < \theta < -1/a$, должна быть найдена из условия сопряжения:

$$\operatorname{Re} \sqrt{\frac{1}{a^2} - \theta^2}\, \Omega^{+\prime}(\theta) = \operatorname{Re} \sqrt{\frac{1}{b^2} - \theta^2}\, \Omega^{-\prime}(\theta). \tag{4}$$

Здесь, как и везде, знак $+$ означает предельное значение функции на верхнем берегу разреза, знак $-$ на нижнем.

Функция $\Omega(\theta)$ находится непосредственно. В самом деле, отобразив нашу плоскость с разрезом на верхнюю полуплоскость, приходим к задаче Дирихле для верхней полуплоскости. Решая эту задачу и возвращаясь к старой переменной, найдем $\Omega(\theta)$, а затем и $\Omega'(\theta) = d\Omega/d\theta$:

$$\Omega'(\theta) = -\frac{B_0}{\pi i} \frac{\sqrt{\frac{1}{b} + \theta_0}}{(\theta_0 - \theta)\sqrt{\frac{1}{b} + \theta_0}} + \frac{\Phi(\theta)}{\sqrt{\frac{1}{b} + \theta_1}}, \tag{5}$$

где

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{-1/b}^{-1/a} \frac{\sqrt{\frac{1}{b} + \tau}\, f(\tau)\, d\tau}{\tau - \theta}.$$

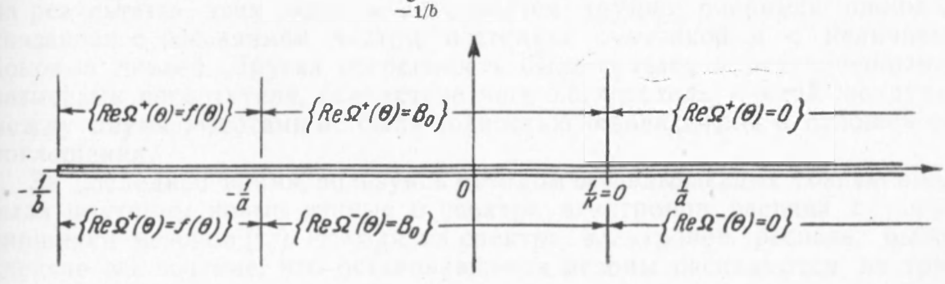

Рис. 2

Используя условие (4), приходим к следующей неоднородной задаче Гильберта для функции $\Phi(\theta)$:

$$\Phi^{+}(\tau) = G(\tau)\,\Phi^{-}(\tau) + g(\tau); \tag{6}$$

$$G(\tau) = \frac{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \tau^2} - \sqrt{\frac{1}{a^2} - \tau^2}}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - \tau^2} + \sqrt{\frac{1}{a^2} - \tau^2}},$$

$$g(\tau) = \frac{2B_0 \sqrt{\frac{1}{b} + \theta_0}}{\pi i} \frac{\sqrt{\frac{1}{a^2} - \tau^2}}{(\theta_0 - \theta)\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} - \tau^2} + \sqrt{\frac{1}{b^2} - \tau^2}\right)}, \quad -\frac{1}{b} < \tau < -\frac{1}{a}.$$

Нас могут интересовать лишь решения задачи (6), исчезающие на бесконечности как $1/\theta$. Требование ограниченности решения в окрестности конца $-1/b$, или, что одно и то же, в окрестности точки D (рис. 1), приводит к единственному решению (индекс $= 0$):

$$\Phi(\theta) = \frac{\chi(\theta)}{2\pi i} \int\limits_{-1/b}^{-1/a} \frac{g(\tau)\, d\tau}{x^{+}(\tau)(\tau - \theta)},$$

где каноническое решение задачи (6)

$$\chi(\theta)=\frac{\frac{1}{b}+\theta}{\frac{1}{a}+\theta}\exp\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-1/b}^{-1/a}\frac{\ln G(\tau)\,d\tau}{\tau-\theta}.$$

Поступило
22 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Тр. Сейсмолог. ин-та АН СССР, № 41 (1934). [2] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1946.