Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 1

ГИДРАВЛИКА

А. А. ГРИБ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПРИ ГИДРАВЛИЧЕСКОМ УДАРЕ В ДЛИННЫХ ТРУБОПРОВОДАХ *

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 24 XII 1951)

Для определения гидродинамических элементов неустановившегося движения капельной жидкости в длинных трубопроводах, диаметр и толщина стенки которых непрерывно меняются по длине, обычно применяют способ характеристик ([1], [2]), который, несмотря на свою общность, требует трудоемких вычислений и не представляет возможностей для выводов качественного характера.

В настоящей заметке для большого класса труб мы даем аналитическое решение уравнений гидравлического удара в замкнутом виде, удобном для решения краевых задач.

При этом потери напора на трение и другие сопротивления в трубопроводе не учитываются.

1. Дифференциальные уравнения неустановившегося одноразмерного движения капельной сжимаемой жидкости в круглой трубе переменного сечения при обычных для гидравлики предположениях имеют следующий вид ([1], [3], [4]):

$$\frac{\partial \rho F}{\partial t} + \frac{\partial \rho Q}{\partial s} = 0, \quad \rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial s} - j\frac{\partial z}{\partial s},$$
$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1}{K}(p - p_0), \quad \frac{F - F_0}{F_0} = \alpha (p - p_0), \quad Q = uF. \tag{1}$$

Здесь $\rho = \rho(s, t)$ — плотность жидкости; $F = F(s, t)$ — площадь поперечного сечения трубопровода; $Q = Q(s, t)$ — расход; $p = p(s, t)$ — давление; $u = u(s, t)$ — продольная скорость; $j = j(s, t)$ — вес единицы объема жидкости; z — превышение центра тяжести сечения трубы над произвольной горизонтальной плоскостью сравнения; s — продольная координата; t — время; K — модуль объемного сжатия жидкости; α — коэффициент, зависящий от материала трубы, толщины ее стенок, диаметра и формы; p_0, ρ_0, F_0 — значения p, ρ и F, соответствующие установившемуся режиму.

Будем считать, следуя Н. Е. Жуковскому, для тонкостенных металлических труб

$$\alpha = \frac{D_0}{lE}, \tag{2}$$

где D_0 — внутренний диаметр трубы, l — толщина ее стенки, E — модуль упругости материала трубы.

* Работа доложена на семинаре по гидромеханике в Ленинградском государственном университете 19 X 1951 г.

Так как K и $\frac{lE}{D_0}$ выражаются числами порядка $2 \cdot 10^4$ кг/см², то величины $\rho' = \rho - \rho_0$ и $F' = F - F_0$ для перепадов давления, интересующих гидравлику, будут малыми величинами.

Вследствие малости значений u, рассматриваемых гидравликой ([3, 4]), конвективными членами в выражениях типа $\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial s}$ и $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial s}$ обычно пренебрегают. В выражениях же $\rho \frac{\partial Q}{\partial s}$, $\rho \frac{\partial u}{\partial t}$, $j \frac{\partial z}{\partial s}$ можно считать $\rho = \rho_0$.

Вводя напор $h = \frac{p}{j_0} + z$ и выражая скорости через расходы, систему уравнений (1), после линеаризации, можно записать в следующем виде ([1]):

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{a^2}{F_0} \frac{\partial Q}{\partial s}, \quad \frac{\partial H}{\partial s} = -\frac{1}{F_0} \frac{\partial Q}{\partial t}, \tag{3}$$

где $H = gh$, $\quad a^2 = \dfrac{K}{\rho_0 \left(1 + \dfrac{KD_0}{lE}\right)}$.

2. Уравнения характеристик для системы (3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int \frac{ds}{a} - t = 2\xi, \quad & dH + \frac{a}{F_0} dQ = 0, \\ \int \frac{ds}{a} + t = 2\eta, \quad & dH - \frac{a}{F_0} dQ = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где ξ и η — постоянные, определяющие характеристику.

Следовательно, системе уравнений (3) можно придать следующий канонический вид:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta} = -\frac{a}{F_0} \frac{\partial Q}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{a}{F_0} \frac{\partial Q}{\partial \xi}. \tag{5}$$

Коэффициент $\frac{a}{F_0}$ в системе уравнений (5) и функция $T = \int_0^s \frac{ds}{a}$ — известные для каждой трубы функции координаты s, т. е. для каждой трубы $\frac{a}{F_0}$ есть известная функция T.

Если

$$\frac{a}{F_0} = A (T + C)^{2n}, \tag{6}$$

где A, C и n — постоянные, то система уравнений (5) сводится к хорошо изученному уравнению Эйлера — Дарбу ([5]), которое интегрируется в общем виде.

В случае иной зависимости $\frac{a}{F_0}$ от T для широкого класса труб всегда можно аппроксимировать с достаточной точностью кривую $\frac{a}{F_0} = f(T)$ на отдельных участках кусками кривых $\frac{a}{F_0} = A (T + C)^{2n}$, соответственно подбирая для каждого участка постоянные A, C и n. Аппроксимация подобного рода была впервые предложена С. А. Христиановичем при интегрировании дифференциальных уравнений плоского сверхзвукового течения газа ([6]).

Записывая уравнения (5) в виде:

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = A (T + C)^{2n} \frac{\partial Q}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial H}{\partial \eta} = -A (T + C)^{2n} \frac{\partial Q}{\partial \eta}, \tag{7}$$

полагая $T+C=\int\frac{ds}{a}=\xi+\eta$ и исключая из системы (7) функцию H, получим

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{n}{\xi+\eta}\left(\frac{\partial Q}{\partial\xi}+\frac{\partial Q}{\partial\eta}\right)=0. \tag{8}$$

При $n=0$, $\frac{a}{F_0}=\text{const}$

$$Q=f_1(\xi)+f_2(\eta). \tag{9}$$

При целых положительных $n=1, 2,\ldots$

$$Q=\frac{\partial^{2n-2}}{\partial\xi^{n-1}\partial\eta^{n-1}}\left[\frac{F_1(\xi)+F_2(\eta)}{\xi+\eta}\right], \tag{10}$$

при этом функция H получается из (7).

Для нецелых n общий интеграл также можно написать в явном виде, однако вследствие его сложного вида он неудобен для решения краевых задач.

Для $n<0$ и целых можно записать следующее выражение для H

$$H=\frac{\partial^{2|n|-2}}{\partial\xi^{|n|-1}\partial\eta^{|n|-1}}\left[\frac{\Phi_1(\xi)+\Phi_2(\eta)}{\xi+\eta}\right], \tag{11}$$

при этом Q получается из (7).

Очевидно, условие (6) может быть представлено также и в следующем виде:

$$\frac{a}{F_0}=C_1\left(\int\limits_0^s\frac{ds}{F_0}+C_2\right)^{\frac{2n}{2n+1}}. \tag{12}$$

3. Наибольший интерес в смысле приложений представляют значения $n=\pm1$, подробно рассмотренные при решении плоской задачи газовой динамики С. А. Христиановичем ([6]).

В этом случае при $n=1$

$$\begin{aligned}
Q&=\sqrt{\frac{F_0}{a}}\left[F_1\left(\int\frac{ds}{a}-t\right)+F_2\left(\int\frac{ds}{a}+t\right)\right],\\
H&=-\sqrt{\frac{a}{F_0}}\left[F_2\left(\int\frac{ds}{a}+t\right)-F_1\left(\int\frac{ds}{a}-t\right)\right]-\\
&\quad-2\sqrt{A}\left[\int F_1(\xi)\,d\xi-\int F_2(\eta)\,d\eta\right].
\end{aligned} \tag{13}$$

При $n=-1$ *

$$\begin{aligned}
H&=\sqrt{\frac{a}{F_0}}\left[\Phi_1\left(\int\frac{ds}{a}-t\right)+\Phi_2\left(\int\frac{ds}{a}+t\right)\right],\\
Q&=-\sqrt{\frac{F_0}{a}}\left[\Phi_2\left(\int\frac{ds}{a}+t\right)-\Phi_1\left(\int\frac{ds}{a}-t\right)\right]-\\
&\quad-\frac{2}{\sqrt{A}}\left[\int\Phi_1(\xi)\,d\xi-\int\Phi_2(\eta)\,d\eta\right].
\end{aligned} \tag{14}$$

* Случай, соответствующий нашему значению $n=-1$, без учета массовых сил, другими методами был независимо получен и также доложен 19 X 1951 г. Д. М. Волковым и И. П. Гинзбургом.

4. Для практики интересен случай, когда $a = \mathrm{const}$, т. е. когда D_0/l постоянная или приблизительно постоянная величина вдоль оси трубы.

В этом случае условие (6) запишется:

$$F_0(s) = A_1(s + C_1)^{-2n} \tag{15}$$

или

$$r_0(s) = A_2(s + C_1)^{-n}. \tag{16}$$

При $n = -1$ имеем коническую трубу; при $n = 1$ — трубу, получающуюся от вращения гиперболы.

5. В том случае, когда аппроксимация кривой $\frac{a}{F_0} = f(T)$ при помощи $n = \pm 1$ не может быть проведена даже на отдельных кусках, следует пользоваться общими формулами (10) или (11).

Пользуясь решением типа (10), при $n \neq \pm 1$, много интересных краевых задач в одноразмерной газовой динамике рассмотрел К. П. Станюкович [7].

Научно-исследовательский институт
математики и механики
Ленинградского государственного университета
им. А. А. Жданова

Поступило
24 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Т. Мелещенко, Изв. Н.-и. ин-та гидротехники, 29, 5 (1941). [2] К. Г. Асатур, Изв. АН Арм.ССР, 3, № 4 (1950). [3] М. А. Мостков, Гидравлический удар в гидроэлектрических станциях, гл. II, М. — Л., 1938. [4] И. А. Чарный, Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах, гл. I, М. — Л., 1951. [5] G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, 2-me partie, Paris, 1894. [6] С. А. Христианович, Прикладн. матем. и мех., 11, в. 2 (1947). [7] К. П. Станюкович, Теория неустановившихся движений газа, 1948.