Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 1

МАТЕМАТИКА

И. С. ГРАДШТЕЙН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, В КОТОРЫХ МНОЖИТЕЛЯМИ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ ВХОДЯТ РАЗЛИЧНЫЕ СТЕПЕНИ МАЛОГО ПАРАМЕТРА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 22 X 1951)

Данная статья представляет собою обобщение предыдущих результатов [1] на случай, когда множителями при производных служат различные степени малого параметра. Мы рассмотрим только тот случай, когда малый параметр η входит множителем в степенях 1 и $1+\alpha$ (кроме нулевой степени). Переход от двух различных степеней параметра η к большему числу различных степеней не представляет никаких трудностей.

1. Пусть $\{\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*, t^*\}$ — множество точек, удовлетворяющих системе уравнений

$$h_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{1а}$$

$$g_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{1б}$$

($\mathbf{x}$ — m-мерный, $\mathbf{y}$ — μ-мерный, $\mathbf{z}$ — ν-мерный векторы). Функции h_i и g_k предполагаются имеющими непрерывные первые частные производные по всем переменным и вторые частные производные по y_j и z_k, непрерывные по всем переменным.

Обозначим через R_1 подмножество множества точек $\{\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*, t^*\}$, обладающее следующим свойством:

Семейство систем уравнений

$$\frac{du_i}{d\tau} = h_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t^*) \quad (i = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{2а}$$

$$0 = g_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}, \mathbf{v}, t^*) \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{2б}$$

определяет движение, равномерно асимптотически устойчивое относительно множества R_1, при условии, что особые точки этого семейства $\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^* \equiv \mathbf{y}^*, \mathbf{v}^* \equiv \mathbf{z}^*, t^*$ принадлежат множеству R_1.

Предположим, кроме того, что в точках множества R_1

$$\begin{vmatrix} \partial h_1/\partial y_1 \ldots \partial h_1/\partial y_\mu & \partial h_1/\partial z_1 \ldots \partial h_1/\partial z_\nu \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \partial h_\mu/\partial y_1 \ldots \partial h_\mu/\partial y_\mu & \partial h_\mu/\partial z_1 \ldots \partial h_\mu/\partial z_\nu \\ \partial g_1/\partial y_1 \ldots \partial g_1/\partial y_\mu & \partial g_1/\partial z_1 \ldots \partial g_1/\partial z_\nu \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \partial g_\nu/\partial y_1 \ldots \partial g_\nu/\partial y_\mu & \partial g_\nu/\partial z_1 \ldots \partial g_\nu/\partial z_\nu \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3}$$

Пусть координатами точки множества R_1, лежащей в фазовой плоскости $x = x^*$, $t = t^*$, будут y^*, z^*. Множеством, отделенным особой точкой x^*, y^*, z^*, t^* в фазовой плоскости $x = x^*$, $t = t^*$, мы будем называть множество точек x^*, y, z, t^*, лежащих в этой фазовой плоскости, удовлетворяющих уравнениям (2б) и обладающих следующим свойством: интегральные кривые, исходящие из точек этого множества и проходящие в фазовой плоскости $x = x^*$, $t = t^*$, при $\tau \to +\infty$ неограниченно приближаются к одной из точек y^*, z^*.

Сумму всех множеств, отделенных точками множества R_1, мы будем называть множеством S_1, отделенным множеством R_1. Заметим, что, в силу определения множества S_1, координаты точек, принадлежащих этому множеству, удовлетворяют системе уравнений (2б).

Предположим, что множество S_1 обладает следующими свойствами:

а) семейство систем дифференциальных уравнений

$$\frac{dw_l}{d\tau} = g_l(x^*, Y^*, w, t^*) \quad (l = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{4}$$

определяет движение, равномерно асимптотически устойчивое относительно множества S_1 при условии, что особые точки $x^*, Y^*, w^* = Z^*, t^*$ этого семейства принадлежат множеству S_1;

б) в точках множества S_1

$$\frac{D(g_1, g_2, \ldots, g_\nu)}{D(z_1, z_2, \ldots, z_\nu)} \neq 0. \tag{5}$$

Пусть координатами точки множества S_1, лежащей в фазовой плоскости $x = x^*, y = Y^*$, $t = t^*$, будут Z^*. Мы будем называть множеством, отделенным особой точкой x^*, Y^*, Z^*, t^* фазовой плоскости $x = x^*$, $y = Y^*$, $t = t^*$, множество точек x^*, Y^*, z, t^* этой плоскости, исходя из которых интегральные кривые при $\tau \to +\infty$ неограниченно приближаются к одной из точек Z^*. Сумму всех множеств, отделенных точками множества S_1, мы будем называть оболочкой S, отделенной множеством S_1. Ясно, что $S_1 \subset S$.

2. Теорема. *Пусть* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ — *непрерывная интегральная кривая системы уравнений*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, y, z, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{6а}$$

$$0 = h_k(x, y, z, t) \quad (k = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{6б}$$

$$0 = g_l(x, y, z, t) \quad (l = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{6в}$$

При этом предполагается, что внутри оболочки S функции h_k и g_l обладают указанными выше свойствами. Про функции f_i предполагается, что они непрерывны по t и удовлетворяют условиям Липшица по x, y, z внутри оболочки S. Далее, пусть отрезок кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, определенный отрезком времени $[0, T]$, вместе со своей сколь угодно малой, но фиксированной $(m+1)$-мерной окрестностью лежит внутри множества R_1.

Наряду с этим рассмотрим интегральную кривую $x = X(t, \eta)$, $y = Y(t, \eta)$, $z = Z(t, \eta)$ системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX_i}{dt} = f_i(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, t) \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{7а}$$

$$\eta \frac{dY_k}{dt} = h_k(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, t) \quad (k = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{7б}$$

$$\eta^{1+\alpha} \frac{dZ_l}{dt} = g_l(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}, t) \quad (l = 1, 2, \ldots, \nu; \alpha > 0). \tag{7в}$$

Мы будем полагать, что начальные значения искомых функций в этой системе образуют точку $\mathbf{X}(0, \eta) = \mathbf{x}(0)$, $\mathbf{Y}(0)$, $\mathbf{Z}(0) \in R$.

При указанных условиях решение $\mathbf{X}(t, \eta)$, $\mathbf{Y}(t, \eta)$, $\mathbf{Z}(t, \eta)$ *системы* (7) *связано с решением* $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z}(t)$ *системы* (6) *соотношениями*

$$\lim_{\eta \to +0} \mathbf{X}(t, \eta) = \mathbf{x}(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant T), \tag{8а}$$

$$\lim_{\eta \to +0} \mathbf{Y}(t, \eta) = \mathbf{y}(t) \quad (0 < t_1 \leqslant t \leqslant T), \tag{8б}$$

$$\lim_{\eta \to +0} \mathbf{Z}(t, \eta) = \mathbf{z}(t) \quad (t_1 < t_2 \leqslant t \leqslant T). \tag{8в}$$

3. Укажем достаточные признаки равномерной асимптотической устойчивости относительно (любого) компакта $R^* \subset R_1$ движения, определенного системой уравнений (2). При этом мы будем предполагать, что функции h_k и g_l обладают свойствами, указанными в теореме.

Признак, получающийся по первому методу Ляпунова. Действительные части всех корней λ_i уравнения

$$\begin{vmatrix} \partial h_1/\partial y_1 - \lambda \ldots \partial h_1/\partial y_\mu & \partial h_1/\partial z_1 \ldots \partial h_1/\partial z_\nu \\ \cdots & \cdots \\ \partial h_\mu/\partial y_1 \ldots \partial h_\mu/\partial y_\mu - \lambda & \partial h_\mu/\partial z_1 \ldots \partial h_\mu/\partial z_\nu \\ \partial g_1/\partial y_1 \ldots \partial g_1/\partial y_\mu & \partial g_1/\partial z_1 \ldots \partial g_1/\partial z_\nu \\ \cdots & \cdots \\ \partial g_\nu/\partial y_1 \ldots \partial g_\nu/\partial y_\mu & \partial g_\nu/\partial z_1 \ldots \partial g_\nu/\partial z_\nu \end{vmatrix} = 0 \tag{9}$$

должны быть отрицательны при условии, что производные $\partial h_i/\partial y_j$ и $\partial h_k/\partial z_l$ взяты в точках множества R^*.

Признак, получающийся по второму методу Ляпунова. Система (2) предварительно переводится в систему

$$\frac{dq_k}{d\tau} = h_k(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* + \mathbf{q}, \mathbf{v}, t^*) \quad (k = 1, 2, \ldots, \mu), \tag{10а}$$

$$0 = g_l(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* + \mathbf{q}, \mathbf{v}, t^*) \quad (l = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{10б}$$

путем подстановки $\mathbf{u} = \mathbf{q} + \mathbf{y}^*$.

Если существует функция $V(\mathbf{q}; \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*, t^*)$, параметры которой связаны соотношением $g_l(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*, t^*) = 0$ $(l = 1, 2, \ldots, \nu)$, обладающая следующими свойствами:

а) функция $V(\mathbf{q}; \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*, t^*)$ определена при значениях $|q_i| \leqslant H$ и при значениях параметров $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*, t^*$, входящих в компакт R^*;

б) функция $V(\mathbf{q}; \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*, t^*)$ в области своего определения непрерывна по всем переменным и обладает производными первого порядка по q_i, непрерывными по всем переменным;

в) функции $V(\mathbf{q}; \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*, t^*)$ и

$$W(\mathbf{q}; \mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*, t^*) \equiv -\sum_{i=1}^{\mu} \frac{\partial V}{\partial q_i} h_i(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* + \mathbf{q}, \mathbf{v}, t^*) \tag{11}$$

обращаются в нуль при $\mathbf{q} = 0$, а при всех остальных значениях $\mathbf{q}$ и при любых значениях параметров $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*, \mathbf{z}^*, t^* \subset R^*$ положительны при условии, что в этих функциях аргументы $\mathbf{v}$ (в том числе и $\mathbf{v}^* \equiv \mathbf{z}^*$) и $\mathbf{q}$ связаны соотношениями

$$g_l(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^* + \mathbf{q}, \mathbf{v}, t^*) = 0 \quad (l = 1, 2, \ldots, \nu), \tag{12}$$

то система (10) равномерно асимптотически устойчива относительно компакта R^*.

Поступило
22 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. С. Градштейн, ДАН, 81, № 6 (1951).