

И. С. АРЖАНЫХ

ФУНКЦИИ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 11 I 1952)

Функции тензора напряжений статики упругого тела были введены Максвеллом⁽¹⁾. Морера дополнил⁽²⁾ три функции Максвелла тремя новыми, а Бельтрами построил дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют функции тензора напряжений в случае изотропного упругого тела. В дальнейшем формулы Максвелла — Морера исследовались с разных точек зрения^(3,4). Ю. А. Крутков показал⁽⁵⁾, что шесть функций статики упругого тела составляют тензор, причем формулы Максвелла — Морера инвариантно связаны с решениями Гродского — Папковича и Буссинеска — Галеркина. М. М. Филоненко-Бородич разработал приближенный способ решения задач о равновесии упругого тела с помощью формул Максвелла и эффективно применил^(6,7) этот способ к решению важных задач теории упругости.

Большой интерес, проявленный к формулам Максвелла — Морера, объясняется тем, что в силу этих формул уравнения равновесия тождественно удовлетворяются.

Естественно возникает вопрос о построении аналогичных формул в гидродинамике. Поставим задачу о таком представлении плотности $\rho(t, x, y, z)$ вектора скорости $\mathbf{v}(t, x, y, z)$ и тензора напряжений $P(t, x, y, z)$, чтобы уравнения гидродинамики тождественно удовлетворялись.

Так как уравнения гидродинамики нелинейны:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} P, \quad (1)$$

то естественно ожидать, что соответствующие формулы будут также нелинейными. Ниже построены эти формулы. Для равновесия наши формулы обращаются в формулы Максвелла — Морера.

Теорема. Пусть независимые функции

$$\begin{aligned} a, b, c, u, A, L, F, \\ l, m, n, v, B, M, G, \\ f, g, h, \omega, C, N, H \end{aligned} \quad (2)$$

переменных t, x, y, z трижды дифференцируемы. Построим вектор \mathbf{a} , с проекциями

$$\frac{\partial a}{\partial x} - \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial m}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3)$$

и тензор A_v , имеющий составляющие

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial a}{\partial t} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial l}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}, \\ & \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial x}, \quad -\frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial z} + \frac{\partial l}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial z}, \\ & \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial c}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y}, \quad -\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть

$$\rho = \text{div } \mathbf{a}_p, \quad \mathbf{v} = \text{div } A_v / \text{div } \mathbf{a}_p. \quad (5)$$

Уравнения гидродинамики тождественно удовлетворяются, если плотность и скорость определить формулами (5), а составляющие тензора напряжений вычислить по следующим формулам:

$$\begin{aligned} P_{xx} &= \rho v_x^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{\partial b}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(2 \frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 a}{\partial t^2}, \\ P_{yy} &= \rho v_y^2 + \frac{\partial}{\partial z} \left(2 \frac{\partial n}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 m}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$P_{zz} = \rho v_z^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{\partial g}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 h}{\partial t^2};$$

$$\begin{aligned} P_{yz} &= \rho v_y v_z + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial n}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right), \\ P_{zx} &= \rho v_z v_x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 M}{\partial z \partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} P_{xy} &= \rho v_x v_y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial l}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Данное представление является наиболее общим, т. е. не существует большего числа независимых функций от t, x, y, z , с помощью которых через производные второго порядка четырехмерный тензор

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} \rho & \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v} & \rho \{ \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \} - P \end{vmatrix} \quad (8)$$

выражается в таком виде, что уравнения (1) тождественно удовлетворяются.

Доказательство. С помощью уравнения неразрывности представим уравнения гидродинамики в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_{tt}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{tx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{ty}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{tz}}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \Pi_{xt}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi_{yt}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{yz}}{\partial z} &= 0, & \frac{\partial \Pi_{zt}}{\partial t} + \frac{\partial \Pi_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \Pi_{zz}}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Прямыми вычислениями убеждаемся в том, что эти уравнения обращаются в тождества, если определить плотность, скорость и тензор напряжений указанными формулами.

Остается показать, что формулы (5), (6), (7) представляют наиболее общее решение. С этой целью заметим, что каждое из уравнений (9) выражает солиноидальность соответствующего четырехмерного вектора.

Но всякое дифференциальное равенство вида

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

имеет место в том и только в том случае, когда

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial z}, \\ \xi &= -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial z}, \quad \eta = -\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial \gamma}{\partial x}, \quad \zeta = -\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \end{aligned} \quad (11)$$

где 6 функций φ, \dots, γ совершенно произвольны. Применяя эти формулы к каждому из уравнений (9), представим составляющие тензора Π через производные первого порядка от 24 функций:

$$\Pi = \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial z} & -\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \dots & -\frac{\partial \psi}{\partial t} + \dots & -\frac{\partial \theta}{\partial t} + \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array} \right\| \quad (12)$$

В силу симметрии тензора Π имеем 6 дифференциальных зависимостей, связывающих 24 функции представления (12). Применяя еще раз формулы (11), выразим эти 24 функции через производные первого порядка от линейных комбинаций новых 36 функций. Затем вычисляем по формулам (12) составляющие тензора Π . В результате будем иметь:

$$\begin{aligned} \Pi_{ih} &= \frac{\partial^2 T_{ik}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 X_{ik}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Y_{ik}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z_{ik}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 X'_{ik}}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 Y'_{ik}}{\partial t \partial y} + \\ &+ \frac{\partial^2 Z'_{ik}}{\partial t \partial z} + \frac{\partial^2 X''_{ik}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 Y''_{ik}}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 Z''_{ik}}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (13)$$

Линейные комбинации T_{ih}, \dots, Z''_{ik} , число которых равно 100, независимы: 28 из них нули, а остальные 72 выражаются через 21 незави-

Таблица 1

	$\frac{\partial^2}{\partial t^2}$	$\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}$	$\frac{\partial^2}{\partial t \partial y}$	$\frac{\partial^2}{\partial t \partial z}$	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2}{\partial z^2}$	$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}$	$\frac{\partial^2}{\partial z \partial x}$	$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$
ρ	0	0	0	0	a	m	h	-2u	-2v	-2w
ρv_x	0	-a	w	v	0	-l	-f	C-B	c	b
ρv_y	0	w	-m	u	-b	0	-g	n	A-C	l
ρv_z	0	v	u	-h	-c	-n	0	g	f	B-A
ρv_x^2	-a	0	2b	2c	0	-N	-M	2F	0	0
ρv_y^2	-m	2l	0	2n	-N	0	-L	0	2G	0
ρv_z^2	-h	2f	2g	0	-M	-L	0	0	0	2H
$\rho v_y v_z$	u	B-C	-n	-g	F	0	0	L	-H	-G
$\rho v_z v_x$	v	-c	C-A	-f	0	G	0	-H	M	-F
$\rho v_x v_y$	w	-b	-l	A-B	0	0	H	-G	-F	N

симых функций, как указано в табл. 1 (см. табл. 1, где против каждой составляющей выписаны те функции, которые в формулах (5), (6), (7) дифференцируются по указанным в соответствующем столбце переменным).

Теперь теорема доказана в полном объеме.

Вопрос о тех уравнениях, которым должны удовлетворять функции тензора напряжений гидродинамики, решается после установления связи между тензором напряжений и тензором скоростей деформаций.

Институт математики и механики
Академии наук Узб.ССР

Поступило
17 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. C. Maxwell, Sci. Papers, 2 (1890). ² G. Morera, Rendiconti d. Acc. d. Lincei, 1 (1892). ³ Р. О. Кузьмин, ДАН, 49, 335 (1945). ⁴ В. И. Блох, Прикл. матем. и мех., 14, в. 4 (1950). ⁵ Ю. А. Крутков, Тензор функций напряжений и общие решения в статике теории упругости, изд. АН СССР, М., 1949. ⁶ М. М. Филопенко-Бородич, Прикл. матем. и мех., 15, в. 2 (1951). ⁷ М. М. Филопенко-Бородич, там же, 15, в. 5 (1951).