Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Д. М. ЭЙДУС

О РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 21 I 1952)

Решению задачи Дирихле методом конечных разностей посвящены работы [1-3]. В настоящей заметке рассматриваются другие краевые задачи.

Пусть Ω — конечная m-мерная область с $(m-1)$-мерной границей Γ. Точки области Ω будем обозначать через $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$. Рассмотрим задачу об отыскании внутри Ω решения уравнения эллиптического типа

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right) = f(x), \tag{1}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$, при условии на границе

$$Pu = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cos(\nu, x_j) = 0, \tag{2}$$

где ν — направление внешней нормали в точках Γ.

Предполагаем, что функция f удовлетворяет в $\Omega+\Gamma$ условию Липшица, а также условию разрешимости задачи $\int\limits_{\Omega} f\,d\Omega = 0$. Коэффициенты a_{ij} предполагаем трижды непрерывно дифференцируемыми в $\Omega+\Gamma$.

Относительно области Ω предполагается, что ее граница Γ может быть разбита на конечное число взаимно налегающих частей Γ_t, $t = 1, 2, \ldots, T$, так, что выполняются следующие условия:

1) Каждая из частей Γ_t определяется уравнением вида $x_{r_t} = \gamma_t(x_1, x_2, \ldots, x_{r_t-1}, x_{r_t+1}, \ldots, x_m)$, где функция γ_t определена и непрерывна в некоторой замкнутой области ω_t, лежащей в плоскости $x_{r_t} = 0$.

2) Обозначим через $\Omega_{\delta t}$ совокупность точек области Ω, проекции которых на плоскость $x_{r_t} = 0$ принадлежат ω_t, а координаты удовлетворяют неравенству $\gamma_t - \delta < x_{r_t} < \gamma_t + \delta$. Тогда область $\Omega_\delta = \sum\limits_{t=1}^{T}\Omega_{\delta t}$ при любом $\delta > 0$ должна содержать некоторую пограничную полоску Q_δ области Ω.

Для решения задачи построим внутри Ω решетку Ω_h, составленную из m-мерных прямоугольных параллелепипедов с ребрами

$h_1, h_2, \ldots, h_m$, параллельными осям координат. Обозначим узлы решетки через z_s, $s = 1, 2, \ldots, \sigma$. Пусть функция v_h задана в узлах. Будем обозначать ее правое разностное отношение через v_{hx_i}, а левое — через $v_{h\bar{x}_i}$. Обозначим через $\bar{v}_h$ такую функцию, что в узлах $\bar{v}_h = v_h$, а внутри каждого параллелепипеда $\bar{v}_h$ постоянна и равна значению v_h в одной из его вершин, в остальных точках области Ω $\bar{v}_h = 0$. Далее положим

$$\Delta_h = h_1 h_2 \ldots h_m, \quad H_h(v_h) = \Delta_h \sum_{\Omega_h} v_h^2, \quad D_h(v_h) = \Delta_h \sum_{\Omega_h} \sum_{i=1}^{m} v_{hx_i}^2,$$

$$E_h(v_h) = \frac{1}{2} \Delta_h \sum_{\Omega_h} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ijh} (v_{hx_i} v_{hx_j} + v_{h\bar{x}_i} v_{h\bar{x}_j}).$$

В суммах E_h и D_h те слагаемые, которые в граничных узлах не имеют смысла, отбрасываются.

Составим функционал

$$F_h(v_h) = E_h(v_h) + 2\Delta_h \sum_{\Omega_h} v_h f_h$$

и найдем функцию u_h, сообщающую функционалу минимальное значение в классе функций v_h, удовлетворяющих условию

$$\Delta_h \sum_{\Omega_h} v_h = 0. \qquad (3)$$

Значения функции u_h в узлах z_s удовлетворяют системе уравнений

$$-\frac{1}{2\Delta_h} \frac{\partial E_h(u_h)}{\partial u_h(z_s)} = f_h + \alpha_h \qquad (4)$$

и дополнительному условию $\Delta_h \sum_{\Omega_h} u_h = 0$, где $\alpha_h = -\frac{1}{\sigma} \sum_{\Omega_h} f_h$. Такое решение системы (4) существует и единственно.

Если z_s — внутренний узел, то уравнение (4) имеет вид

$$L_h u_h \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{m} [(a_{ijh} u_{hx_j})_{\bar{x}_i} + (a_{ijh} u_{h\bar{x}_j})_{x_i}] = f_h + \alpha_h. \qquad (5)$$

Выберем такую последовательность решеток Ω_{h_n}, что $h_{ni} \to 0$ при $n \to \infty$, и докажем, что $\bar{u}_{h_n} \to u$ и $\bar{u}_{h_n x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$ в $L_2(\Omega)$, где u — решение задачи.

Для этого предварительно устанавливаются леммы:

Лемма 1. *Пусть на каждой из решеток последовательности Ω_h (индекс n в дальнейшем отбрасывается) задана функция v_h, причем*

$$H_h(v_h) < c_1, \tag{6}$$

$$D_h(v_h) < c_2, \tag{7}$$

где c_1 и c_2 — постоянные. Тогда последовательность $\overline{v}_h$ компактна в $L_2(\Omega)$.

Лемма 2. *Пусть v_h удовлетворяет условию* (3). *Тогда имеет место неравенство*

$$H_h(v_h) < cD_h(v_h), \tag{8}$$

где c не зависит ни от v_h, ни от номера решетки.

Перейдем к доказательству сходимости. Известно ([4],[5]), что существует такое фундаментальное решение $K(x, y)$ уравнения $Lu = 0$, что функция $w(x) = \int\limits_{\Omega} K(x, y) f(y)\, d\Omega_y$ имеет в $\Omega + \Gamma$ непрерывные производные второго порядка и удовлетворяет уравнению (1). Пусть функция ψ_h такова, что во всех внутренних узлах $L_h\psi_h = f_h\alpha_h$, а в граничных узлах $\psi_h = w_h$. Нетрудно показать, что $\overline{\psi}_h \to w$ и $\overline{\psi}_{hx_i} \to \frac{\partial w}{\partial x_i}$ в $L_2(\Omega)$. Положим $u_h - \psi_h = \varphi_h$, тогда

$$L_h\varphi_h = 0 \tag{9}$$

во всех внутренних узлах. Отсюда следует неравенство *

$$\Delta_h \sum_{\Omega_{1h}} \left(\sum_{i, j=1}^{m} \varphi^2_{hx_ix_j} + \sum_{i, j, k=1}^{m} \varphi^2_{hx_ix_jx_k} \right) < \beta \Delta_h \sum_{\Omega_{2h}} \varphi^2_h,$$

где область Ω_1 содержится вместе с границей в Ω_2, а Ω_2 — в Ω и β не зависит от номера решетки. Далее с помощью (8) доказывается, что неравенства (6) и (7) имеют место для $v_h = u_h$, а следовательно, и для $v_h = \varphi_h$. Применяя лемму 1 к функциям φ_h, φ_{hx_i} и $\varphi_{hx_ix_j}$, выделим подпоследовательность $\overline{\varphi}_{h_p} \to \varphi$ в $L_2(\Omega)$ так, что $\overline{\varphi}_{h_px_i} \to \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$ и $\overline{\varphi}_{h_px_ix_j} \to \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$ в $L_2(\Omega_0)$, где Ω_0 — произвольная внутренняя подобласть области Ω и $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}$ — обобщенные производные. Из (9) получим $L\varphi = 0$, откуда следует, согласно ([5]), что функция φ дважды непрерывно дифференцируема в Ω. Итак, $\overline{u}_{h_p} \to u$ в $L_2(\Omega)$, где $u = \varphi + w$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая уравнению (1). Далее доказывается, что и $\overline{u}_{h_px_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$ в $L_2(\Omega)$. Наконец, устанавливается, что функция u удовлетворяет условию (2) в обобщенном смысле ([6]). Именно, пусть Ω_q — последовательность таких областей с гладкими границами Γ_q, что $\Omega_q \subset \Omega_{q+1}$, $\Omega_q \subset \Omega$ и $\Omega = \sum\limits_{q=1}^{\infty} \Omega_q$. Тогда для всякой функции $v \in L_2(\Omega)$ и такой, что $\frac{\partial v}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$, имеем

$$\lim_{q \to \infty} \int\limits_{\Gamma_q} v \cdot Pu\, d\Gamma_q = 0.$$

---

* Аналогичное неравенство для случая уравнения Лапласа доказано в ([3]).

Ввиду того, что $\int\limits_{\Omega} u\, d\Omega = 0$, а решение задачи при этом условии единственно, вся последовательность $\overline{u_h} \to u$ в указанном выше смысле.

Вполне аналогично решается задача о собственных значениях для оператора Lu. Почти без изменений указанные выше рассуждения переносятся на случай смешанных краевых условий, когда на части границы $u = 0$, а на остальной ее части $Pu = 0$. Наконец, нами рассмотрен случай уравнения

$$Lu + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + au = f.$$

Здесь предполагается, что при $f \equiv 0$ задача имеет только нулевое решение.

Функция u_h находится в этом случае из системы

$$-\frac{1}{2\Delta_h} \frac{\partial E_h(u_h)}{\partial u_h(z_s)} = f_h - a_h u_h - \sum_{i=1}^{m} a_{ih} u_{hx_i},$$

которая является разрешимой при достаточно малых h_i. Относительно сходимости получаем тот же результат, что и выше.

Поступило
15 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. А. Люстерник, Матем. сборн., 32 (1926). [2] И. Г. Петровский, Усп. матем. наук, в. 8 (1940). [3] В. Курант, К. Фридрихс и Г. Леви, там же, в. 8 (1940). [4] Е. Е. Леви, там же, в. 8, 249 (1940). [5] С. Г. Михлин, ДАН, 77, № 3 (1951). [6] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950.