Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

В. А. ТОНЯН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА МНОЖЕСТВАХ, РАЗБИВАЮЩИХ ПЛОСКОСТЬ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 14 I 1952)

В плоскости комплексного переменного z рассмотрим замкнутое множество E и функцию $f(z)$, определенную и непрерывную на E (кроме, быть может, бесконечно удаленной точки). Вопрос об асимптотической аппроксимации $f(z)$ на E, т. е. об аппроксимации вида

$$|f(z)-G(z)|<\varepsilon(|z|), \qquad z\in E, \tag{1}$$

где $\varepsilon(r)>0$ — произвольная непрерывная функция, в случае нигде не плотных континуумов E, не разбивающих плоскость, рассматривался в ряде работ. Исчерпывающее решение этого вопроса было дано в 1939 г. в работе М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева ([1]). Согласно полученному ими результату, для того чтобы при произвольных непрерывных функциях $f(z)$ и $\varepsilon(r)>0$ существовала целая функция $G(z)$, удовлетворяющая (1), необходимо и достаточно, чтобы замкнутое нигде не плотное множество E не разбивало плоскость и чтобы существовала функция $\eta(r)$, растущая к $+\infty$ при $r\to+\infty$ и такая, что любую точку z_0 дополнения к E можно соединить с бесконечно удаленной точкой линией, расположенной в дополнении к E и вне круга $|z|\leqslant\eta(|z_0|)$.

В случае, когда множество E разбивает плоскость, естественно поставить аналогичный вопрос для аппроксимации мероморфными функциями.

В настоящей заметке мы приводим одно достаточное условие для возможности асимптотической аппроксимации мероморфными функциями.

Теорема. *Пусть замкнутое множество E таково, что любой круг радиуса δ с центром в любой точке z содержит континуум диаметра $r(\delta)$ не зависящего от z, расположенный вне E, причем*

$$\liminf_{\delta\to0}\frac{\delta}{r(\delta)}\leqslant k<\infty. \tag{2}$$

Каковы бы ни были непрерывная на E, кроме, быть может, бесконечно удаленной точки, функция $f(z)$ и непрерывная функция $\varepsilon(r)>0$, произвольно быстро стремящаяся к нулю при $r\to\infty$, существует мероморфная функция $H(z)$, для которой

$$|f(z)-H(z)|<\varepsilon(|z|), \qquad z\in E.$$

Доказательство. Пусть M — замкнутое подмножество круга $|z|\leqslant R$, обладающее свойством C_q: любой круг радиуса δ с центром в любой граничной точке z дополнения к M содержит континуум из дополнения к M диаметра $r(\delta)$, не зависящего от z, причем $\liminf_{\delta\to 0} \delta [r(\delta)]^{-1} < q < \infty$.

Через $M(r)$ обозначим множество, составленное из круга $|z| \leqslant r$ и той части M, которая расположена вне этого круга. Легко видеть, что если нигде не плотное множество M обладает свойством C_q, то любое из множеств $M(r)$ обладает свойством $C_{2(q+1)}$.

Переходя к доказательству теоремы, выберем последовательность монотонно убывающих к нулю положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, для которых $\varepsilon_n < {}^1/_3\, \varepsilon(|z|)$ при $n \geqslant |z|$, $n = 1, 2, \ldots$

Положим $\eta_{n-1} = \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}$, так что $\eta_k > 0$ и

$$\sum_{\nu=n-1}^{\infty} \eta_\nu = \varepsilon_n. \tag{3}$$

В работе (2) установлена теорема об аппроксимации рациональными функциями на множествах, разбивающих плоскость. Приведем формулировку этой теоремы.

Пусть для некоторой последовательности $\delta_1 > \delta_2 > \ldots > \delta_n \to 0$ известно, что в любом круге радиуса δ_n с центром в любой граничной точке дополнения к ограниченному замкнутому множеству E существует континуум, принадлежащий дополнению к E и имеющий диаметр, превышающий r_n.

Если

$$\liminf_{n\to\infty} \omega(\delta_n) \left(\frac{\delta_n}{r_n}\right)^2 = 0,$$

то для любой непрерывной на E и аналитической во всех внутренних точках E функции $\varphi(z)$ с модулем непрерывности $\omega(\delta)$ возможна аппроксимация вида

$$\inf_{\{R\}} \max_{z\in E} |f(z) - R(z)| = 0, \tag{4}$$

где $\{R\}$ — всевозможные рациональные функции.

Из условия (2) следует, что в нашем случае аппроксимация вида (4) на любой конечной порции E всегда возможна, независимо от модуля непрерывности аппроксимируемой функции. Для любого целого $n > 0$ можно указать поэтому рациональную функцию $R_n(z)$, удовлетворяющую неравенству

$$|f(z) - R_n(z)| < \eta_n, \quad z \in M_{n-1,\,n}, \tag{5}$$

где M_{r_1, r_2} $(r_1 < r_2)$ — часть E, расположенная в кольце $r_1 \leqslant |z| \leqslant r_2$.

Покажем теперь, что существует последовательность рациональных функций $T_n(z)$, удовлетворяющих условиям:

$$|T_n(z)| < \eta_{n-1} + 2\eta_n + \eta_{n+1}, \quad z \in M_{n-1,\,n}; \tag{6}$$

$$|T_n(z)| < \eta_n, \quad |z| \leqslant n-1; \tag{7}$$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu(z) - R_{n+1}(z)\right| < \eta_n, \quad z \in M_{n,\,n+1}. \tag{8}$$

Пусть дана система $n+1$ рациональных функций $T_0(z), T_1(z), \ldots$ $\ldots, T_n(z)$, удовлетворяющих условию (8); тогда, пользуясь (5), получим, что на пересечении $M_{n,n+1} \cdot M_{n+2,n+2}$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu(z) - R_{n+2}(z)\right| \leqslant \left|\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu(z) - R_{n+1}(z)\right| +$$

$$+ |R_{n+1}(z) - f(z)| + |R_{n+2}(z) - f(z)| \leqslant \eta_n + \eta_{n+1} + \eta_{n+2}. \qquad (9)$$

Так как последнее удовлетворяется не только на пересечении $M_{n,n+1} M_{n+1,n+2}$, но также и в некоторой его окрестности, то существует положительное число Δ такое, что (9) не перестает быть справедливым и на множестве $M_{n+1-\Delta,n+1}$.

Пусть $\varphi(z)$ означает функцию, определенную и непрерывную на множестве $E(|z| \leqslant n) + M_{n,n+2}$ и удовлетворяющую условиям:

$$\varphi(z) = -\sum_{\nu=0}^{n} T_\nu(z) + R_{n+2}(z) \quad \text{при } z \in M_{n+1,n+2}; \qquad (10)$$

$$|\varphi(z)| < \eta_n + \eta_{n+1} + \eta_{n+2} \quad \text{при } z \in M_{n,n+1}; \qquad (11)$$

$$\varphi(z) = 0 \quad \text{при } |z| \leqslant n. \qquad (12)$$

Сформулированная выше теорема дает возможность построить рациональную функцию $T_{n+1}(z)$ такую, что

$$|\varphi(z) - T_{n+1}(z)| < \eta_{n+1}, \quad z \in E(|z| \leqslant n) + M_{n,n+2}.$$

Но тогда рациональная функция $T_{n+1}(z)$ вместе с системой $T_0(z)$, $T_1(z), \ldots, T_n(z)$ удовлетворяет условиям:

$$|T_{n+1}(z)| < \eta_n + 2\eta_{n+1} + \eta_{n+2} \quad \text{при } z \in M_{n,n+1}; \qquad (13)$$

$$|T_{n+1}(z)| < \eta_{n+1} \quad \text{при } |z| \leqslant n; \qquad (14)$$

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n+1} T_\nu(z) - R_{n+2}(z)\right| < \eta_{n+1} \quad \text{при } z \in M_{n+1,n+2}. \qquad (15)$$

Итак, если существует система рациональных функций $T_0(z), \ldots$ $\ldots, T_n(z)$, удовлетворяющая условию (8), то существует и следующая рациональная функция $T_{n+1}(z)$, которая вместе с $T_0(z)$, $T_1(z), \ldots, T_n(z)$ образует систему, удовлетворяющую условиям (6), (7), (8), с очевидной заменой n на $n+1$.

Положим теперь

$$T_0(z) = R_1(z).$$

Тогда

$$|T_0(z) - R_1(z)| = 0 < \eta_0,$$

т. е условие (8) выполнено для $n = 0$ и, в силу доказанного, существует последовательность рациональных функций $T_0(z), T_1(z), \ldots, T_n(z)$, удовлетворяющих условиям (6), (7), (8).

Пусть теперь k — любое целое положительное число. На основании (7) и (3)

$$\sum_{\nu=k}^{\infty} |T_{\nu+1}(z)| < \sum_{\nu=k}^{\infty} \eta_{\nu+1} = \varepsilon_{k+2} \quad \text{при } |z| \leqslant k,$$

и, так как, в силу выбора, $\varepsilon_{k+2} \to 0$, то ряд $\sum\limits_{\nu=k}^{\infty} T_{\nu+1}(z)$ равномерно сходится в области $|z| \leqslant k$.

Определим мероморфную функцию

$$H(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} T_\nu(z).$$

Из (6), (7), (8) следует, что на множестве $M_{k-1,\,k}$

$$|H(z)-R_k(z)|\leqslant\left|\sum_{\nu=0}^{k-1} T_\nu(z)-R_k(z)\right|+|T_k(z)|+\sum_{\nu=k+1}^{\infty}|T_\nu(z)|<$$

$$<2(\eta_{k-1}+\eta_k+\eta_{k+1})+\sum_{\nu=k+2}^{\infty}\eta_\nu.$$

Из (13), (5), а также согласно выбору ε_n, имеем в каждой точке $M_{k-1,\,k}$ $(k=1, 2,\ldots)$

$$|H(z)-f(z)|\leqslant|H(z)-R_k(z)|+|R_k(z)-f(z)|<$$

$$<2(\eta_{k-1}+\eta_k+\eta_{k+1})+\sum_{\nu=k+2}^{\infty}\eta_\nu+\eta_k<3\sum_{\nu=k-1}^{\infty}\eta_\nu<\varepsilon(|z|),$$

и, так как k произвольно, то теорема доказана.

Приведем следствие из доказанной теоремы.

Асимптотическая аппроксимация мероморфными функциями вида (1) любой непрерывной функции $f(k)$ возможна, если замкнутое нигде не плотное множество E удовлетворяет одному из следующих условий:

а) *Множество E разбивает плоскость на конечное число областей;*

б) *все области, дополнительные к E, имеют бесконечно большой диаметр;*

в) *любая точка z множества E является граничной точкой суммы конечного числа некоторых из областей, дополнительных к E (не зависящих от z).*

Сектор математики
Академии наук Армянской ССР

Поступило
10 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев, ДАН, **23**, № 8 (1939). [2] С. Н. Мергелян, Усп. матем. наук, **7**, в. 2 (1952).