

Д. СУПРУНЕНКО

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ МАТРИЦ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 11 I 1952)

Пусть P — произвольное поле, а $GL(n)$ — полная линейная группа над P . Мы будем рассматривать максимальные разрешимые подгруппы группы $GL(n)$. Разрешимость понимается в обычном смысле: группа Γ разрешима, если она обладает нормальным рядом с абелевыми факторами. Разрешимая подгруппа Γ группы $GL(n)$ называется максимальной разрешимой подгруппой $GL(n)$, если она не содержится в другой разрешимой подгруппе $GL(n)$. Нетрудно понять, что для описания всех максимальных разрешимых подгрупп $GL(n)$ достаточно знать лишь неприводимые максимальные разрешимые подгруппы $GL(n)$.

Для случая конечного основного поля такие группы изучались многими авторами в связи с решением задачи, поставленной еще Галуа, о построении примитивных разрешимых групп подстановок заданной степени (1, 2, 4). Разрешимые матричные группы над алгебраически замкнутым полем рассматривались А. И. Мальцевым (3).

В нашей статье (5) делается попытка изучить свойства неприводимых максимальных разрешимых подгрупп полной линейной группы над произвольным полем. В частности, там описывается строение максимальных абелевых нормальных делителей неприводимых максимальных разрешимых подгрупп. Оказалось, что максимальный абелев нормальный делитель максимальной неприводимой разрешимой группы является прямым произведением s экземпляров мультипликативной группы поля K степени m относительно основного поля P , причем число ms — делитель числа n .

В настоящей заметке, дополняя статью (5), мы установим единственность максимального абелевого нормального делителя максимальной неприводимой разрешимой линейной группы над бесконечным полем и конечность числа классов сопряженных максимальных разрешимых подгрупп полной линейной группы в случае алгебраически замкнутого основного поля.

Теорема 1. *Максимальная неприводимая разрешимая подгруппа Γ полной линейной группы в случае бесконечного основного поля обладает единственным максимальным абелевым нормальным делителем.*

Доказательство. Ради краткости мы ограничимся лишь случаем, когда Γ примитивна, т. е. когда пространство, в котором действует Γ , нельзя представить в виде прямой суммы подпространств, перемещаемых элементами Γ между собой. В этом случае ((5), § 1) максимальный абелев нормальный делитель группы Γ является мультипликативной группой некоторого расширения K основного поля P .

Пусть теперь H и H_1 — два максимальных абелевых нормальных делителя группы Γ : H — мультипликативная группа поля $K \supseteq P$, H_1 — мультипликативная группа поля $K_1 \supseteq P$. H и H_1 — подгруппы конечного индекса в Γ (см. ⁽⁵⁾, теорема 3). Их пересечение $H \cap H_1$, в силу известной теоремы, подгруппа конечного индекса в Γ и в H . $H \cap H_1$ — мультипликативная группа поля $\Delta = K \cap K_1$. Мультипликативная группа подполя Δ может быть подгруппой конечного индекса мультипликативной группы бесконечного поля K лишь при $\Delta = K$. Следовательно, $\Delta = K$, $H \cap H_1 = H$, $H_1 \supseteq H$, а в силу максимальной $H = H_1$. Теорема 1 доказана.

В статье ⁽⁵⁾ (стр. 91) мы показали, что максимальная примитивная разрешимая группа матриц обладает следующим нормальным рядом:

$$\Gamma \supseteq V \supseteq C \supseteq H \supseteq E, \quad (1)$$

где H — максимальный абелев нормальный делитель Γ (H — мультипликативная группа некоторого расширения K основного поля P , $K: P = m$, m/n); V — централизатор H в Γ ; C/H — максимальный абелев нормальный делитель Γ/H , заключенный в V/H ; V/C изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы автоморфизмов абелевой группы C/H . Группа Γ/V изоморфна некоторой разрешимой подгруппе группы автоморфизмов поля K относительно P . Там же было показано, что порядок C/H является квадратным делителем числа n^2/m^2 .

Добавим здесь, что в случае, когда K сепарабельно относительно P , порядок C/H равен n^2/m^2 .

Доказательство последнего утверждения можно получить (мы его здесь лишь намечаем), рассматривая K -оболочки $[V]$ и $[C]$ групп V и C и P -оболочку $[\Gamma]$ группы Γ . $[C]$ — простая нормальная алгебра над K (см. ⁽⁵⁾, лемма 11). Пользуясь этим и тем, что C/H совпадает со своим централизатором в V/H (⁽⁵⁾, теорема 2), можно показать, что $[V] = [C]$. Далее, можно двумя способами подсчитать ранг алгебры $[\Gamma]$ и получить нужное равенство.

Теорема 2. *Максимальные разрешимые подгруппы полной линейной группы $GL(n)$ над алгебраически замкнутым полем разбиваются лишь на конечное число классов сопряженных подгрупп.*

Доказательство. Нетрудно видеть, что достаточно ограничиться лишь случаем максимальных примитивных разрешимых подгрупп полной линейной группы.

Пусть теперь основное поле P алгебраически замкнуто, тогда вместо нормального ряда (1) можно написать ряд

$$\Gamma \supseteq C \supseteq H \supseteq E, \quad (2)$$

ибо в этом случае $K = P$, $V = \Gamma$. У всех максимальных примитивных разрешимых подгрупп группы $GL(n)$ один и тот же максимальный абелев нормальный делитель — мультипликативная группа поля P . Рассмотрим теперь возможные типы групп C . Как показано в ⁽⁵⁾ (стр. 83), группа C допускает такую систему образующих

$$H, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_r, b_r, \quad (3)$$

что a_i, b_i подчинены условиям:

$$a_i^{k_i} \in H, \quad b_i^{k_i} \in H, \quad b_i a_i = \nu_i a_i b_i, \quad (4)$$

ν_i — первообразный корень из единицы степени k_i , $\nu_i \in P$, элементы разных пар перестановочны, $k_1 k_2 \dots k_t = n$, k_i / k_{i-1} .

Порядок C/H равен n^2 . Так как P алгебраически замкнуто, то можно a_i, b_i так выбрать, что $a_i^{k_i} = b_i^{k_i} = 1$. Тогда все a_i, b_i соответствующим выбором базиса пространства приводятся одновременно к виду

$$a_i = E_{k_1 k_2 \dots k_{i-1}} \times \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & v_i & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & v_i & \\ & & & & k_{i-1} \end{bmatrix} \times E_{\frac{n}{k_1 k_2 \dots k_i}},$$

$$b_i = E_{k_1 k_2 \dots k_{i-1}} \times \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \times E_{\frac{n}{k_1 k_2 \dots k_i}},$$

где E_ρ — единичная матрица порядка ρ , \times — знак кронекеровского произведения ((5), стр. 101—102).

Следовательно, группа C с точностью до сопряженности в $GL(n)$ однозначно определяется числами k_1, k_2, \dots, k_t . Таким образом, существует столько несопряженных типов групп C , сколько число n допускает различных разложений вида

$$n = k_1 k_2 \dots k_t, \quad k_i / k_{i-1}, \quad k_t > 1, \quad (5)$$

т. е. число несопряженных групп C равно числу всех абелевых групп порядка n .

Пусть теперь максимальные примитивные разрешимые группы Γ и Γ_1 имеют одну и ту же группу C и пусть внутренние автоморфизмы групп Γ и Γ_1 индуцируют одни и те же автоморфизмы группы C . Тогда $\Gamma = \Gamma_1$. Действительно, автоморфизмы группы C , индуцируемые внутренними автоморфизмами групп Γ и Γ_1 , вызывают в свою очередь автоморфизмы алгебры $[C]$, которая совпадает с полной матричной алгеброй над P . Следовательно, матрицы из Γ и Γ_1 , определяющие один и тот же автоморфизм C , могут отличаться лишь на множитель из H . Поэтому Γ и Γ_1 , обе содержащие H , совпадают.

Остается теперь рассмотреть возможные автоморфизмы группы C , определяемые всеми Γ , содержащими C .

Для элементов $g \in \Gamma$ и системы образующих группы C можно написать

$$g^{-1} a_i g = \lambda_i a_1^{\alpha_{i1}} b_1^{\beta_{i1}} \dots a_t^{\alpha_{it}} b_t^{\beta_{it}},$$

$$g^{-1} b_i g = \mu_i a_1^{\gamma_{i1}} b_1^{\delta_{i1}} \dots a_t^{\gamma_{it}} b_t^{\delta_{it}},$$

где λ_i, μ_i — корни степени k_i из единицы, $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ij}$ — вычеты по k_j . Поэтому все вместе взятые Γ , содержащие C в качестве нормального делителя, определяют своими внутренними автоморфизмами лишь конечное число автоморфизмов группы C . Отсюда и предыдущих замечаний и следует теорема 2.

В общем случае, для произвольного поля P , теорема 2 неверна. Легко, например, показать, что над полем рациональных чисел существует бесконечное множество несопряженных максимальных разрешимых подгрупп $GL(n)$.

Добавим еще, что классификация типов максимальных разрешимых подгрупп полной линейной группы в случае алгебраически замкнутого основного поля сводится к перечислению типов максимальных разре-

шимых групп матриц вида

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} & \dots & \alpha_{1t} & \beta_{1t} \\ \gamma_{11} & \delta_{11} & \dots & \gamma_{1t} & \delta_{1t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{t1} & \delta_{t1} & \dots & \gamma_{tt} & \delta_{tt} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Здесь $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \delta_{ij}$ — вычеты по модулю k_j ($k_1 k_2 \dots k_t = n$, k_i / k_{i-1}) и подчинены условиям

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^t \frac{k_1}{k_j} (\alpha_{ij} \delta_{ij} - \beta_{ij} \gamma_{ij}) &\equiv \frac{k_1}{k_i} \pmod{k_1}; \\ \sum_{n=1}^t \frac{k}{k_n} (\alpha_{in} \beta_{jn} - \alpha_{jn} \beta_{in}) &\equiv 0 \pmod{k_1}, \quad i \neq j; \\ \sum_{n=1}^t \frac{k_1}{k_n} (\alpha_{in} \delta_{jn} - \gamma_{jn} \beta_{in}) &\equiv 0 \pmod{k_1}, \quad i \neq j; \\ \sum_{n=1}^t \frac{k_1}{k_n} (\gamma_{in} \delta_{jn} - \gamma_{jn} \delta_{in}) &\equiv 0 \pmod{k_1}, \quad i \neq j; \\ k_i \alpha_{ij} &\equiv k_i \beta_{ij} \equiv k_i \gamma_{ij} \equiv k_i \delta_{ij} \equiv 0 \pmod{k_j}. \end{aligned} \quad (7)$$

Поступило
19 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ О. Ю. Шмидт, Об уравнениях, решаемых в радикалах, степень которых есть степень простого числа p^m , Киев, 1913. ² С. Jordan, *Traité des Substitutions*, Paris, 1870. ³ А. И. Мальцев, Матем. сборн., 28 (70): 3 (1951). ⁴ Д. Супруненко, Матем. сборн., 20 (62): 2 (1947). ⁵ Д. Супруненко, Уч. зап. БГУ им. В. И. Ленина, в. 12, сер. физ.-матем. (1951).