

Б. А. РЫМАРЕНКО

**О НАИМЕНЬШЕМ УКЛОНЕНИИ ОТ НУЛЯ ЦИКЛИЧЕСКИ  
МОНОТОННОГО ПОЛИНОМА ПРИ ЗАДАНИИ ДВУХ ЕГО СТАРШИХ  
КОЭФФИЦИЕНТОВ**

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 12 I 1952)

В настоящей заметке рассматривается вопрос о наименьшем отклонении от нуля в промежутке  $[0, 1]$  циклически монотонного \* полинома  $y_n(x) \in \Pi_p$  степени  $n$  вида:

$$y_n(x) = x^n - \sigma x^{n-1} + p_2 x^{n-2} + \dots + p_n, \quad (1)$$

где  $\sigma$  — данное число, а  $p \geq n - 2$ , решение которого вытекает из общих теорем С. Н. Бернштейна (1).

Напомним обозначения и основные свойства циклически монотонных полиномов, необходимые нам для дальнейшего.

S-полиномы и C-полиномы Эйлера — Бернштейна определяются символическими равенствами:

$$\begin{aligned} S_{2m-1}(x) &= \frac{(x+E)_{2m-1}}{(2m-1)!}, & S_{2m}(x) &= \frac{(x-E^*)_{2m}}{(2m)!}, \\ C_{2m-1}(x) &= \frac{(x-E^*)_{2m-1}}{(2m-1)!}, & C_{2m}(x) &= \frac{(x+E)_{2m}}{(2m)!}, \end{aligned} \quad (2)$$

если везде в формуле бинома Ньютона степени  $E^k$  заменить числа  $E_k$  (соответственно,  $E^{*k}$  — числами  $E_k^*$ ). Числа же  $E_{2k}$  последовательно определяются из символических равенств:

$$(1 + E)_{2k} = 0;$$

$$E_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots); \quad E_{2k}^* = 0 \quad (k > 0; E_0^* = 1);$$

$$E_{2k+1}^* = (1 + E)_{2k+1}.$$

\* Как известно, функция  $f(x) \in \Pi_m$  называется циклически монотонной порядка  $m > 1$ , если она имеет на отрезке  $[0, 1]$  знакопостоянные производные всех порядков  $\leq m$ , удовлетворяющие неравенству  $f^{(k)}(x) f^{(k+2)}(x) \leq 0$  при  $0 \leq k \leq m - 2$ .

Если при этом  $f(x) \geq 0$  и  $f'(x) \geq 0$  на  $[0, 1]$ , то условимся писать  $f(x) \in \Pi_m^{(+, +)}$ ; если  $f(x) \leq 0$ , а  $f'(x) \leq 0$ , то  $f(x) \in \Pi_m^{(-, -)}$ , и т. д.

Очевидно, что  $\Pi_m = \Pi_m^{(+, +)} + \Pi_m^{(+, -)} + \Pi_m^{(-, -)} + \Pi_m^{(-, +)}$ .

Далее:

$$S_n(x) \text{ и } C_n(x) \in \Pi_n; \quad S'_k(x) = C_{k-1}(x); \quad C'_k(x) = S_{k-1}(x);$$

$$S_{2k}(1) = C_{2k}(0) \frac{E_{2k}}{(2k)!}; \quad S_{2k+1}(1) = -C_{2k+1}(0) = \frac{E_{2k+1}^*}{(2k+1)!}.$$

При этих обозначениях справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть  $\sigma \leq 0$  или  $\sigma \geq n^*$ .

Тогда среди полиномов  $y_n(x) \in \Pi_{n-1}^{(+,+)} + \Pi_{n-1}^{(-,-)}$  вида (1) наименее уклоняется от нуля на  $[0, 1]$  полином

$$y_n^*(x) = \begin{cases} n! \left[ S_n(x) + \left(1 - \frac{\sigma}{n}\right) S_{n-1}(x) \right], & \text{если } n = 2m; \\ n! \left[ S_n(x) - \frac{\sigma}{n} S_{n-1}(x) \right], & \text{если } n = 2m + 1. \end{cases} \quad (3)$$

Минимальное уклонение от нуля  $L_n$  равно:

$$L_n = \begin{cases} |E_n + (n - \sigma) E_{n-1}^*|, & \text{если } n = 2m; \\ |E_n^* - \sigma E_{n-1}|, & \text{если } n = 2m + 1. \end{cases} \quad (4)$$

Теорема 2. Среди полиномов  $y_n(x) \in \Pi_{n-2}^{(+,+)}$  вида (1) наименее уклоняется от нуля на  $[0, 1]$  полином\*\*:

$$(n = 4m) \quad y_n^*(x) = \begin{cases} n! \left[ S_n(x) + \left(1 - \frac{\sigma}{n}\right) S_{n-1}(x) \right], & \text{если } \sigma \geq \frac{n}{2} \\ n! \left[ S_n(x) + \left(1 - \frac{\sigma}{n}\right) S_{n-1}(x) + \left(\frac{\sigma}{n} - \frac{1}{2}\right) S_{n-2}(x) \right], & \text{если } \sigma \leq \frac{n}{2}; \end{cases}$$

$$(n = 4m + 2) \quad y_n^*(x) = n! \left[ S_n(x) + \left(1 - \frac{\sigma}{n}\right) S_{n-1}(x) + \frac{\sigma^2}{2n^2} S_{n-2}(x) \right]; \quad (5)$$

$$(n = 4m + 1) \quad y_n^*(x) = \begin{cases} n! \left[ S_n(x) - \frac{\sigma}{n} S_{n-1}(x) \right], & \text{если } \sigma \leq \frac{n}{2}; \\ n! \left[ S_n(x) - \frac{\sigma}{n} S_{n-1}(x) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{n}\right) S_{n-2}(x) \right], & \text{если } \sigma \geq \frac{n}{2} \end{cases}$$

$$(n = 4m + 3) \quad y_n^*(x) = n! \left[ S_n(x) - \frac{\sigma}{n} S_{n-1}(x) + \frac{(n - \sigma)^2}{2n^2} S_{n-2}(x) \right],$$

причем минимальное уклонение от нуля  $L_n$  равно:

$$(n = 4m) \quad L_n = \begin{cases} E_n + (n - \sigma) E_{n-1}^*, & \text{если } \sigma \geq \frac{n}{2}; \\ E_n + (n - \sigma) E_{n-1}^* + (n - 1) \left(\sigma - \frac{n}{2}\right) E_{n-2}, & \text{если } \sigma \leq \frac{n}{2}; \end{cases}$$

\* При  $0 < \sigma < n$  задача не имеет смысла.

\*\* В остальных случаях, когда  $y_n(x) \in \Pi_{n-2} - \Pi_{n-2}^{(+,+)}$ , полином наименьшего уклонения находится аналогично.

$$L_n = E_n + (n - \sigma) E_{n-1}^* + \frac{n-1}{2n} \sigma^2 E_{n-2}^*; \quad (6)$$

$(n=4m+3)$

$$L_n = \begin{cases} E_n - \sigma E_{n-1}, & \text{если } \sigma \leq \frac{n}{2}; \\ E_n - \sigma E_{n-1} + (n-1) \left( \frac{n}{2} - \sigma \right) E_{n-2}^*, & \text{если } \sigma \geq \frac{n}{2}; \end{cases}$$

$(n=4m+1)$

$$L_n = E_n^* - \sigma E_{n-1} + \frac{n-1}{2n} (n - \sigma)^2 E_{n-2}^*. \quad (6a)$$

$(n=4m+3)$

Для доказательства этих теорем разложим полином  $y_n(x)$  по  $S$ -полиномам (формула (48) статьи (1)):

$$y_n(x) = \sum_{k=1}^n a_k S_k(x). \quad (7)$$

Тогда очевидно (в силу (1)), что

$$a_n = n!; \quad a_{n-1} = \begin{cases} n! \left( 1 - \frac{\sigma}{n} \right), & \text{если } n = 2l; \\ -(n-1)! \sigma, & \text{если } n = 2l + 1. \end{cases} \quad (8)$$

При  $p = n - 1$  ( $\sigma \leq 0$  или  $\sigma \geq n$ )  $y_n^{(n-1)}(x) = n! \left( x - \frac{\sigma}{n} \right)$  сохраняет знак на  $[0, 1]$ ; при  $p = n - 2$

$$y_n^{(n-2)}(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} x^2 - (n-1)! \sigma x + a_{n-2}, & \text{если } n = 2l; \\ \frac{n!}{2} x^2 - (n-1)! \sigma x + \left[ (n-1)! \sigma - \frac{n!}{2} + a_{n-2} \right], & \text{если } n = 2l + 1, \end{cases} \quad (9)$$

также сохраняет знак на  $[0, 1]$ , если

$$a_{n-2} \geq \begin{cases} \frac{(n-1)! \sigma^2}{n} & \text{при } n = 2l, \\ \frac{(n-1)! (n-\sigma)^2}{n} & \text{при } n = 2l + 1, \end{cases} \quad (10)$$

или если

$$a_{n-2} \leq \min \begin{cases} \left[ 0; (n-1)! \left( \sigma - \frac{n}{2} \right) \right] & \text{при } n = 2l; \\ \left[ 0; (n-1)! \left( \frac{n}{2} - \sigma \right) \right] & \text{при } n = 2l + 1. \end{cases} \quad (11)$$

Следовательно, в этих случаях применена лемма 2 С. Н. Бернштейна (1). Поэтому у полинома, наименее уклоняющегося от нуля,

$$a_k = 0 \quad \begin{cases} (k = 0, 1, \dots, n-2, \text{ если } p = n-1; \\ k = 0, 1, \dots, n-3, \text{ если } p = n-2). \end{cases}$$

Это и доказывает теорему 1.

Теорема 2 будет доказана, если подобрать число  $a_{n-2}$ , удовлетворяющее условиям (10) или (11), так, чтобы величина уклонения  $L_n$  стала возможно малой.

Легко проверить, что надлежащий подбор числа  $a_{n-2}$  приведет к формулам (5) и (6).

При  $p = n - 1$  и  $\sigma = n$  (если  $n = 2l$ ) или  $\sigma = 0$  (если  $n = 2l + 1$ ) приходим к теореме 1 С. Н. Бернштейна<sup>(1)</sup>.

Рассмотренная нами задача аналогична известной задаче Е. И. Золотарева<sup>(2)</sup> о наименьшем уклонении от нуля полинома вида (1) без дополнительного условия монотонности полинома.

Поступило  
19 XII 1951

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, № 5 (1950). <sup>2</sup> Е. И. Золотарев, Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля. Полн. собр. соч., в. 2, 1932.