Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

И. А. ВАЙНШТЕЙН

# ОБ ОДНОМЕРНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 I 1952)*

1. В настоящей работе рассматривается вопрос о числе значений, принимаемых кратностью точек при $k$-мерных повышающих размерность отображениях. Приведем необходимые определения.

Отображение $f: X \to Y$ пространства $X$ на пространство $Y$ называется $k$-мерным, если полный прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки $y \in Y$ имеет размерность $\dim f^{-1}(y) \leqslant k$. Кратностью $\mu(y)$ точки $y \in Y$ при отображении $f: X \to Y$ называется мощность множества $f^{-1}(y)$. Положим $Y_k = \{y;\ \mu(y) \geqslant k\}$ и $Y_k^0 = \{y;\ \dim f^{-1}(y) \geqslant k\}$. Если $A \subset X$, то соответствующие множества для частичного отображения $f: A \to f(A)$ обозначаются через $Y_k(A)$ и $Y_k^0(A)$.

Все встречающиеся в дальнейшем отображения предполагаются непрерывными и замкнутыми, а все пространства — метрическими пространствами со счетной базой.

Для нульмерного отображения $f: X \to Y$, повышающего размерность на $n$: $\dim Y = \dim X + n$, известны неравенства Фрейденталя [1]:

$$\dim Y_k \geqslant \dim Y - k + 1 \quad (k = 1, \ldots, n+1), \tag{1}$$

служащие основой для теорем о числе значений, принимаемых кратностями точек при повышающих размерность нульмерных отображениях и т. д. Уже элементарный пример отображения «ковра» Серпинского (см. определение этой кривой, например, в [2], т. II, стр. 696) на квадрат, при котором каждый смежный контур «слипается» в точку, показывает, что для одномерных повышающих размерность отображений неравенства (1) неверны; именно, здесь $\dim Y = 2$, $\dim X = 1$ и $\dim Y_2 = 0 = \dim Y - 2$.

Мы получим соответствующие неравенства для $k$-мерных отображений. При этом для простоты мы ограничиваемся рассмотрением одномерных отображений, а для $k$-мерных отображений укажем лишь основные формулы.

2. Начнем с нескольких вспомогательных предложений. Известно [1], что $Y_k$ для отображения $f: X \to Y$ есть множество типа $F_\sigma$ в $Y$. Имеет также место следующая лемма.

Лемма 1. *$Y_k^0$ есть множество типа $F_\sigma$ в $Y$.*

Доказательство. Допустим сначала, что $f: X \to Y$ — компактное отображение (т. е. каждое множество $f^{-1}(y)$ компактно). Рассмотрим множество $H_\varepsilon$ точек $y \in Y$, для которых множество $f^{-1}(y)$ имеет открытое $\varepsilon$-покрытие кратности $\leqslant k+1$. Нетрудно проверить, что, так как отображение $f$ замкнуто, множество $H_\varepsilon$ открыто в $Y$. Ясно, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_{1/n} \supset Y \setminus Y_k^0$. Если же $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_{1/n}$, то $f^{-1}(y)$ при каждом $n$ имеет $1/n$-покрытие кратности $\leqslant k+1$; и, так как $f^{-1}(y)$ компактно, отсюда следует, что $y \in Y \setminus Y_k^0$. Таким образом, $Y \setminus Y_k^0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} H_{1/n}$ есть $G_\delta$ в $Y$, и, значит, $Y_k^0$ — множество типа $F_\sigma$ в $Y$.

Пусть теперь $f\colon X \to Y$ — произвольное (замкнутое) отображение. Для каждой точки $y \in Y$, если она не изолирована в $Y$, положим $D_y = \text{гр}\, f^{-1}(y)$; если же $y$ — изолированная точка, то выберем произвольную точку $x \in f^{-1}(y)$ и положим $D_y = x$. Тогда множество $D = \bigcup\limits_{y \in Y} D_y$ замкнуто в $X$ и отображение $f\colon D \to Y$ компактно ([3]). Поэтому, по доказанному, $Y_k^0(D)$ есть $F_\sigma$ в $Y$. Ясно, что $Y_k^0(D) \subset Y_k^0$; если теперь $y \in M = Y_k^0 \setminus Y_k^0(D)$, то $f^{-1}(y)$ имеет непустое множество внутренних точек в $X$. Поэтому $M$ счетно и $Y_k^0 = Y_k^0(D) \cup M$ есть $F_\sigma$ в $Y$.

Лемма 2. *Пусть $Y$ — произвольное пространство и $A_1, \ldots, A_s$ — некоторые множества типа $F_\sigma$ в $Y$, причем* $\dim A_k \leqslant n_k$ $(k = 1, \ldots, s)$. *Пусть, далее, $C_1$ и $C_2$ — два замкнутых непересекающихся множества в $Y$. Тогда $C_1$ и $C_2$ можно отделить в $Y$ замкнутым множеством $B$, для которого* $\dim (B \cap A_k) \leqslant n_k - 1$ $(k = 1, \ldots, s)$.

Доказательство. В каждом множестве $A_k$ возьмем множество $N_k$ типа $F_\sigma$ (в $A_k$, следовательно, и в $Y$), удовлетворяющее условиям: $\dim N_k = 0$, $\dim (A_k \setminus N_k) \leqslant n_k - 1$. Положим $N = \bigcup N_k$. Тогда $\dim (A_k \setminus N) \leqslant n_k - 1$ и $\dim N = 0$. Поэтому $C_1$ и $C_2$ можно отделить замкнутым множеством $B$, для которого $B \cap N = \Lambda$ (через $\Lambda$ обозначается пустое множество). Но тогда $B \cap A_k \subset A_k \setminus N_k$, и, значит, $\dim (B \cap A_k) \leqslant n_k - 1$ $(k = 1, \ldots, s)$.

Замечание. В лемме 2 одно из множеств $A_k$ может совпадать с $Y$. При этом, очевидно, будет $\dim B \leqslant \dim Y - 1$. Следует отметить, что лемма справедлива и в случае счетного числа множеств $A_k$.

3. Лемма 3. *Пусть $f\colon X \to Y$ — одномерное отображение. Тогда имеет место формула:*

$$\dim Y \leqslant n, \quad \dim Y_1^0 \leqslant n-1 \to \dim X \leqslant n \tag{2}$$

(*$A \to B$ означает: «из $A$ следует $B$»*).

Доказательство. При $n = 0$ отображение $f$ нульмерно, следовательно, оно не понижает размерности (см. ([4]), стр. 127), поэтому для этого случая формула (2) справедлива. Предположим теперь, что (при $n \geqslant 1$) формула (2) верна для $n-1$, и докажем ее для $n$. Так как $\dim f^{-1}(y) \leqslant 1 \leqslant n$, то для того чтобы доказать, что $\dim X \leqslant n$, достаточно (см. ([4]), стр. 125) убедиться в том, что множество $f^{-1}(y)$ и произвольное замкнутое множество $C$, для которого $f^{-1}(y) \cap C = \Lambda$, можно отделить замкнутым множеством размерности $\leqslant n-1$. В силу леммы 2 точку $y$ и замкнутое множество $f(C)$ можно отделить в $Y$ замкнутым множеством $B$, для которого $\dim B \leqslant n-1$ и $\dim (B \cap Y_1^0) \leqslant n-2$. Применяя индукционное предположение к отображению множества $f^{-1}(B)$ на $B$, получаем: $\dim f^{-1}(B) \leqslant n-1$. При этом ясно, что $f^{-1}(B)$ отделяет $f^{-1}(y)$ от $C$, ч. т. д.

Лемма 4. *Пусть $f\colon X \to Y$ — одномерное отображение. Тогда имеет место формула:*

$$\dim X \leqslant n, \quad \dim Y_2 \leqslant n-1, \quad \dim Y_1^0 \leqslant n-2 \to \dim Y \leqslant n. \tag{3}$$

(В случае $n=0$, когда отображение $f$ оказывается гомеоморфизмом, вместо $\dim Y_1^0 \leqslant n-2=-2$ следует писать $\dim Y_1^0=-1$, и тогда формула (3) очевидна.)

Доказательство. При $n=1$ имеем $\dim Y_1^0=-1$, следовательно, $Y_1^0=\Lambda$ и отображение $f$ нульмерно; в этом случае формула (3) следует из неравенства (1) при $k=2$. Допустим теперь, что формула (3) верна для $n-1$, и докажем ее для $n$.

Рассмотрим два замкнутых непересекающихся множества $C_1$ и $C_2$ пространства $Y$. Нужно показать, что их можно отделить замкнутым множеством размерности $\leqslant n-1$. В силу формулы (2), примененной к отображению множества $f^{-1}(Y_2)$ на $Y_2$, имеем: $\dim f^{-1}(Y_2) \leqslant n-1$, причем, так как $Y_2$ есть $F_\sigma$ в $Y$, то $f^{-1}(Y_2)$ есть $F_\sigma$ в $X$. Поэтому существует такое множество $M$ типа $F_\sigma$ в $X$, что $\dim M=0$, $\dim(X \setminus M) \leqslant n-1$ и $f^{-1}(Y_2) \subset X \setminus M$ (достаточно взять произвольное множество $A$ типа $F_\sigma$ в $X$, для которого $\dim A=0$ и $\dim(X \setminus A) \leqslant n-1$; тогда $\dim(A \cup f^{-1}(Y_2)) \leqslant n-1$ и существует множество $H$ типа $G_\delta$ в $X$, содержащее $A \cup f^{-1}(Y_2)$ и имеющее размерность $\leqslant n-1$ ((²), т. I, стр. 511; в этом случае множество $M=X \setminus H$ обладает всеми нужными свойствами). На $M$ отображение взаимно-однозначно, поэтому, если $M=\bigcup M_k$, где все $M_k$ замкнуты, то на каждом $M_k$ отображение топологично. Следовательно, $\dim f(M_k)=0$, и, значит, $\dim f(M)=0$, причем $f(M)$ есть $F_\sigma$ в $Y$.

В силу леммы 2 множества $C_1$ и $C_2$ можно отделить таким замкнутым множеством $B$, что $\dim(B \cap Y_2) \leqslant n-2$, $\dim(B \cap Y_1^0) \leqslant n-3$ и $\dim(B \cap f(M))=-1$, т. е. $B \cap f(M)=\Lambda$. Рассмотрим отображение множества $S=f^{-1}(B)$ на $B$; имеем: 1) $S \subset X \setminus M$, следовательно, $\dim S \leqslant n-1$; 2) $Y_2(S) \subset B \cap Y_2$, следовательно, $\dim Y_2(S) \leqslant n-2$, и 3) $Y_1^0(S) \subset B \cup Y_1^0$, следовательно, $\dim Y_1^0(S) \leqslant n-3$. Отсюда на основании индукционного предположения получим $\dim B \leqslant n-1$, ч. т. д.

Следствие 1. *Пусть* $f\colon X \to Y$ — *одномерное отображение и* $\dim Y > \dim X$; *тогда* $\dim Y_2 \geqslant \dim Y-2$.

В самом деле, положим $n=\dim Y-1$ и допустим, что $\dim Y_2 < \dim Y-2=n-1$. Тогда $\dim X \leqslant n$ и, так как $Y_1^0 \subset Y_2$, $\dim Y_1^0 < n-1$; поэтому формула (3) дает $\dim Y \leqslant n$, что невозможно.

Следствие 2. *Пусть* $f\colon X \to Y$ — *одномерное отображение*, $\dim Y > \dim X$ *и* $\dim Y_2=\dim Y-2$; *тогда* $\dim Y_1^0=\dim Y-2$.

В самом деле, положим $n=\dim Y-1$ и допустим, что $\dim Y_1^0 < \dim Y-2=n-1$; тогда формула (3) дает $\dim Y \leqslant n$, что невозможно.

Отображение называется, как известно, монотонным, если полный прообраз каждой точки при этом отображении связен.

Следствие 3. Пусть $f\colon X \to Y$ — *одномерное монотонное отображение и* $\dim Y > \dim X$; *тогда* $\dim Y_1^0 \geqslant \dim Y-2$.

С помощью леммы 4 получаем:

Лемма 5. *Пусть* $f\colon X \to Y$ — *одномерное отображение и* $\dim Y_k > \dim X$. *Тогда* $\dim Y_{k+1} \geqslant \dim Y_k-2$, *и если* $\dim Y_{k+1}=\dim Y_k-2$, *то* $\dim Y_1^0=\dim Y_k-2$.

В результате приходим к следующей теореме:

Теорема 1. *Пусть* $f\colon X \to Y$ — *одномерное отображение и* $\dim Y=\dim X+n$; *пусть, далее,* $\dim Y_1^0=\dim Y-m$. *Тогда для* $k \leqslant n+1$ *имеем:* 1) *если* $k<m$, *то* $\dim Y_k \geqslant \dim Y-k+1$; 2) $\dim Y_m \geqslant \dim Y-m$ (*при этом ясно, что если* $\dim Y_m=\dim Y-m=\dim Y_1^0$, *то для всех* $k>m$ *также* $\dim Y_k=\dim Y-m$).

Следствие. *Пусть* $f\colon X \to Y$ — *одномерное отображение*, $\dim Y=$

$= \dim X + n$ *и* $\dim Y_1^0 < \dim Y - (n+1) = \dim X - 1$. *В этом случае:* 1) *имеют место неравенства:* $\dim Y_k \geqslant Y - k + 1$ $(k = 1, \ldots, n+1)$; 2) *кратность точек* $\mu(y)$ *принимает по крайней мере* $n+1$ *различных значений.*

4. Все изложенное выше с соответствующими изменениями имеет место и для $k$-мерных отображений. Формула (2) заменяется формулой:

$$\dim Y \leqslant n, \quad \dim Y_1^0 \leqslant n-1, \ldots, \dim Y_k^0 \leqslant n-k \to \dim X \leqslant n, \tag{4}$$

а формула (3) — формулой:

$$\dim X \leqslant n, \quad \dim Y_2 \leqslant n-1, \quad \dim Y_1^0 \leqslant n-2, \ldots$$
$$\ldots, \dim Y_k^0 \leqslant n-(k+1) \to \dim Y \leqslant n. \tag{5}$$

Заметим, что формулу (4) (как и формулу (2), являющуюся частным случаем формулы (4), когда $k=1$) можно рассматривать как аналог теоремы Фрейденталя для случая понижающих размерность отображений. В самом деле, из нее следует, например, что *если* $f$: $X \to Y$ — *$k$-мерное отображение и* $\dim Y = \dim X - k$, *то непременно* $\dim Y_k^0 = \dim Y$, *а также, например, что $k$-мерное отображение* $f$: $X \to Y$, *при котором* $\dim Y_1^0 \leqslant \dim Y - k$, *не повышает размерности*, и т. д.

С помощью формулы (5) приходим к предложениям, аналогичным тем, которые изложены выше для одномерных отображений. В частности, отметим, что *при $k$-мерных повышающих размерность отображениях всегда* $\dim Y_2 \geqslant \dim Y - k - 1$, *и случай* $\dim Y_2 = \dim Y - k - 1$ *возможен лишь, если* $\dim Y_1^0 = \dim Y_2^0 = \cdots = \dim Y_k^0 = \dim Y - k - 1 = \dim Y_2$. Отсюда, в частности, следует, что *при $k$-мерных повышающих размерность монотонных отображениях справедливо соотношение* $\dim Y_1^0 \geqslant \dim Y - k - 1$.

5. Пусть $f$: $X \to Y$ — повышающее разномерность отображение. С помощью указанных здесь формул можно получить соответствующие результаты и для оценки размерностей множеств $Y_k'$ точек, имеющих порядок $\nu(y) \geqslant k$ (см. ([5])). В частности, справедлива следующая теорема:

Теорема 2. *Пусть* $f$: $X \to Y$ — *одномерное отображение, обладающее тем свойством, что полный прообраз* $f^{-1}(y)$ *каждой точки* $y \in Y$, *если он нигде не плотен в* $X$, *содержит хотя бы одну изолированную (относительно* $f^{-1}(y)$) *точку. Пусть, далее,* $\dim Y = \dim X + n$ *и* $\dim Y_1^0 < \dim X - 1$. *В этом случае:* 1) *имеют место неравенства:*

$$\dim Y_k' \geqslant \dim Y - k + 1 \quad (k = 1, \ldots, n+1);$$

2) *порядок точек* $\nu(y)$ *принимает по крайней мере* $n+1$ *различных значений.*

В заключение отметим, что все вышеизложенное справедливо также для непрерывных (но, возможно, не замкнутых) отображений пространств типа $F_\sigma$.

Научно-исследовательский институт
механики и математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Freudenthal, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., **5**, 34 (1932). [2] П. С. Урысон, Тр. по топологии и по другим областям математики, **1—2**, 1951. [3] И. А. Вайнштейн, ДАН, **57**, 319 (1947). [4] В. Гуревич и Г. Волмэн, Теория размерности, 1948. [5] И. А. Вайнштейн, ДАН, **67**, 9 (1949).