Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. АЗБЕЛЕВ и Р. ВИНОГРАД

ПРОЦЕСС ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ОТЫСКАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 27 VI 1951)

Пусть в n-мерном (действительном или комплексном) пространстве задан линейный оператор A, симметричность которого не предполагается.

Описываемый ниже процесс последовательных приближений приводит при надлежащем выборе нулевого приближения к любому собственному вектору оператора A. Характер сходимости выясняется в теореме 2.

Процесс определим следующим образом.

В качестве нулевого приближения выберем произвольный вектор $x_0 \neq 0$. Здесь положим $\lambda_0 = \frac{(Ax_0, x_0)}{\|x_0\|^2}$, построим оператор $B_0 = A - \lambda_0 E$ и вектор $y_0 = B_0^* B_0 x_0$, и теперь в качестве следующего приближения возьмем $x_1 = x_0 - \eta_0 y_0$, где η_0 — числовой коэффициент, равный $\frac{(y_0, x_0)}{\|y_0\|^2} = \frac{\|B_0 x_0\|^2}{\|y_0\|^2}$. При этом нулевым приближением для собственного числа считаем λ_0. Над x_1 производим те же операции, получаем λ_1 и x_2. Вообще, пусть λ_{k-1} и x_k уже определены, тогда полагаем $\lambda_k = \frac{(Ax_k, x_k)}{\|x_k\|^2}$, затем $B_k = A - \lambda_k E$, далее $y_k = B_k^* B_k x_k$ и $\eta_k = \frac{(y_k, x_k)}{\|y_k\|^2} = \frac{\|B_k x_k\|^2}{\|y_k\|^2}$, наконец, $x_{k+1} = x_k - \eta_k y_k$. Процесс приближений определен.

Грубую оценку сходимости дает теорема 1.

Теорема 1. *В зависимости от выбора x_0 имеет место один из двух случаев: либо $x_k \to 0$, либо все предельные для последовательности $\{x_k\}$ векторы принадлежат одному и тому же собственному подпространству и имеют одинаковую норму $d > 0$.*

Этот результат уточняется теоремами 2 и 3.

Теорема 2. *Пусть собственному числу λ' оператора A отвечает в нормальной жордановой форме матрицы (A) только диагональный ящик, т. е. принадлежащее λ' инвариантное подпространство L' состоит только из собственных векторов. Тогда имеет место сходимость процесса со скоростью геометрической прогрессии к отличному от нуля вектору x' из L' (т. е. $\|x_k - x'\| \leqslant Cq^k$, где $q < 1$), если в качестве x_0 выбран произвольный вектор, образующий с L' угол, меньший некоторого α_0.*

Замечание. Примеры показывают, что при нарушении условия о диагональности ящика может наблюдаться сходимость лишь со скоростью $1/k$.

Т е о р е м а 3. *В условиях теоремы 2 относительно L' «область притяжения» $G(L')$ подпространства L', т. е. множество таких нулевых приближений, которые приводят к отличным от нуля векторам из L', есть открытое множество.*

З а м е ч а н и е 1. Теорема 2 устанавливала лишь, что $G(L')$ содержит некоторый достаточно узкий «конус» вокруг L'.

З а м е ч а н и е 2. В случае симметричности оператора A число q, фигурирующее в оценке сходимости (теорема 2), просто выражается через собственные числа оператора A. Пусть последние расположены в порядке возрастания: $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_r$ $(r \leqslant n)$. Если мы находимся в «области притяжения» подпространства L_p, принадлежащего λ_p, то

$$q = \frac{M_p - m_p}{M_p + m_p},$$

где M_p — большее из двух чисел $(\lambda_1 - \lambda_p)^2$ и $(\lambda_r - \lambda_p)^2$, а m_p — меньшее из двух чисел $(\lambda_{p-1} - \lambda_p)^2$ и $(\lambda_{p+1} - \lambda_p)^2$ (в случае $p = 1$ или $p = r$ принимаем соответственно $\lambda_{p-1} = \lambda_p$ или $\lambda_{p+1} = \lambda_p$).

З а м е ч а н и е 3. Пусть нормальная жорданова форма матрицы A — диагональная. Сумма «областей притяжения» всех собственных подпространств есть, по теореме 3, множество открытое, следовательно, дополнительное множество F, которое является тогда, в силу теоремы 1, «областью притяжения» нуля, замкнуто.

Представляется весьма вероятной справедливость гипотезы:

«Область притяжения» нуля, по крайней мере в случае приводимости (A) к диагональной форме, является нигде не плотным множеством.

Будучи доказано, это предложение означало бы, что случай сходимости процесса к нулю практически невозможен. Гипотеза легко доказывается для всех операторов в двумерном пространстве (даже без предположения о приводимости (A) к диагональному виду) и для некоторых операторов в трехмерном пространстве. Доказательства в общем случае найти не удалось.

В заключение считаем долгом отметить, что в предлагаемом методе использованы идеи способа последовательных приближений для решения систем линейных уравнений, изложенного в неопубликованном докладе А. М. Лопшица.

Институт математики и механики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
25 IV 1951