Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

Р. Н. ЩЕРБАКОВ

АФФИННО- И ПРОЕКТИВНО-ИНВАРИАНТНЫЕ КЛАССЫ ЛИНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ, ХАРАКТЕРИЗУЕМЫЕ ПРИ ПОМОЩИ ПРИСОЕДИНЕННОЙ ЛИНИИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 I 1952)

Н. Г. Туганов ([1]) показал, что в метрической геометрии весьма важный класс линий на поверхности (а именно, класс линий, инварианты которых связаны линейным соотношением с постоянными коэффициентами) геометрически характеризуется тем, что с линией этого класса L можно ассоциировать другую линию L^* на другой поверхности так, что их канонические реперы в соответствующих точках будут неизменно связаны, т. е. координаты элементов репера линии L^* относительно репера линии L будут постоянны.

Построенные в ([2], [3]) эквиаффинно- и проективно-инвариантные реперы линии на поверхности дают возможность рассмотреть задачу об определении аффинно- и проективно-инвариантных классов линий на поверхности, характеризуемых наличием присоединенной линии, аффинный или проективный репер которой инвариантно связан с таким же репером данной линии.

§ 1. В эквиаффинной геометрии деривационные формулы канонического репера линии L на поверхности имеют вид ([2]):

$$\frac{dr}{ds} = e_1, \quad \frac{de_1}{ds} = \alpha e_1 + \beta e_2 + e_3, \quad \frac{de_2}{ds} = \gamma e_1 - \alpha e_2, \quad \frac{de_3}{ds} = \mu e_1 + \pi e_2,$$

где r — радиус-вектор переменной точки линии, e_i — инвариантные векторы репера и ds, α, β, γ, μ, π — аффинные инварианты линии на поверхности.

Требование наличия присоединенной линии L^* на другой поверхности, точка r^* и направление e_1^* которой имели бы относительно репера линии L в соответствующей точке постоянные координаты, характеризует класс линий на поверхности, имеющий следующее натуральное уравнение:

$$a_0^2 (a_1^1 \alpha + a_1^2 \gamma) + a_0^3 (a_1^2 \mu - a_1^1 \pi) + a_1^2 = 0, \tag{1}$$

где a_0^i и a_k^i суть постоянные числа, являющиеся, соответственно, координатами векторов $r^* - r$ и e_1^* относительно репера линии L. При этом точка присоединенной линии L^* находится в плоскости сопряженного нормального сечения линии L, а касательная к L^* параллельна касательной плоскости поверхности в соответствующей точке линии L. Частными случаями класса (1) являются: 1) линии $A\mu + B\pi + C = 0$, рассмотренные в ([2]) (L^* находится на линейчатой поверхности аффинных нормалей S и удаляется в бесконечность при $C=0$); 2) линии $A\gamma + B\mu + C = 0$ ($e_1^* \parallel e_2$); 3) линии $A\alpha + B\pi = 0$ ($e_1^* \parallel e_1$); 4) линии $A(B\alpha + C\gamma) + C = 0$ (L^* находится на развертывающейся поверхности Σ сопряженных направлений линии L и удаляется в бесконечность для линий $\alpha : \gamma = \mathrm{const}$); 5) линии Дарбу $\alpha = 0$ (L^* находится на Σ и $e_1^* \parallel e_1$); 6) аффинные линии кривизны $\pi = 0$ (L^* находится на S и $e_1^* \parallel e_1$); 7) линии $\gamma = \mathrm{const}$ (L^* есть геометрическое место лучевых точек линии L).

§ 2. На произвольной поверхности только линия L класса

$$a_0^2(\alpha + a_1^2\gamma) + a_0^3(a_1^2\mu - \pi) + a_1^2 = 0 \tag{2}$$

имеет присоединенную линию L^* (на другой поверхности), аффинный канонический репер которой связан с аффинным каноническим репером линии L так, что точка линии L^* имеет постоянные координаты, а векторы репера линии L^* — постоянные направления относительно репера линии L в соответствующей точке. Эта присоединенная линия L^* определяется уравнением: $r^* = r + a_0^2 e_2 + a_0^3 e_3$, а векторы ее репера выражаются в виде:

$$e_1^* = \lambda_1 (e_1 + a_1^2 e_2), \quad e_2^* = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} e_2, \quad e_3^* = \lambda_2 (a_3^1 e_1 + a_3^2 e_2 + e_3), \tag{3}$$

где $\lambda_2 = ce - a_3^1 s$; $(\lambda_1)^2 = \lambda_2 (1 + a_0^2\gamma + a_0^3\mu)$; a_3^1, a_3^2, c — произвольные постоянные, а a_0^2, a_0^3, a_1^2 — константы из уравнения (2). Всякая линия класса $b\alpha + c\pi = 0$, кроме присоединенной линии описанного вида ($a_1^2 = 0$), имеет также параллельную присоединенную линию, определяемую уравнением $r^* = r + be_2 + ce_3 = r + \rho$ с репером e_i^*, связанным с репером линии L соотношениями: $e_1^* = \lambda_1 e_1$; $e_2^* = \lambda_2 \rho$; $e_3^* = \lambda_3 (a_3^1 e_1 + a_3^2 e_2 + a_3^3 e_3)$; $(\lambda_1)^2 = h(b - c\beta) / m\lambda_3$; $(\lambda_2)^2 = mh / (b - c\beta)\lambda_3$; $\lambda_3 = c_1 \exp(\int [\alpha - a_3^1 h (b - c\beta)]\, ds)$; $m = 1 + b\gamma + c\mu$, где c_1, a_3^1, a_3^2, a_3^3 — произвольные постоянные и $1/h = a_3^3 b - a_3^2 c \neq 0$. Для линий этого же класса $b\alpha + c\pi = 0$, и только для них можно построить присоединенную линию L^* с полной параллельностью реперов (выбрав $a_3^1 = a_3^2 = a_1^2 = 0$ в формулах (3)).

§ 3. Рассматривая задачу об отыскании линии L_M на поверхности (M), имеющей присоединенную линию L_N на другой поверхности (N), элементы канонического (в смысле ([3])) проективного репера которой инцидентны тем или иным элементам такого же репера линии L_M, получим следующие результаты (в обозначениях, принятых в ([3]) для случая $t = 0$ и в ([5])).

К каждой линии L_M на поверхности (M) можно присоединить ∞^1 линий L_N на поверхностях (N) так, что первые и вторые директрисы Вильчинского реперов линий L_M и L_N (построенных в соответствующих точках этих линий) будут совпадать. Сложные отношения δ_1 и δ_2 вершин, расположенных, соответственно, на общей первой и общей второй директрисах, связаны соотношением:

$$(\mu^2 - \pi^2)\delta_2 - \mu^2 \delta_1 \delta_2 + \pi^2 \delta_1 = 0,$$

где μ и π — инварианты линии L_M. Отсюда следует, что: 1) линии $\mu = 0$ характеризуются наличием присоединенных линий L_N, таких, что одноименные директрисы соответствующих реперов совпадают и сложные отношения четверок вершин на обеих директрисах равны: $\delta_1 = \delta_2$; 2) линии $\pi = 0$ характеризуются наличием присоединенных линий L_N с общими директрисами соответствующих реперов, причем вершины N_1 и N_2 реперов присоединенных линий совпадают с вершинами M_1 и M_2 реперов линии L_N.

Линии $\Delta = 0$ характеризуются наличием единственной присоединенной линии L_N, такой, что реперы пары линий имеют общие соответственные директрисы Вильчинского, а точки M и N являются вершинами, полярными к соответствующим касательным плоскостям поверхностей (N) и (M). Вдоль этих линий асимптотические реперы поверхностей (M) и (N) совпадают, а инварианты ds, μ и π линии L_M равны тем же инвариантам линии L_N. Линия L_N также является линией $\Delta_N = 0$. Отсюда следует, что на поверхностях Годо все линии имеют $\Delta = 0$, а соответствующие им линии $\Delta_N = 0$ располагаются на одной и той же поверхности — второй поверхности пары Годо. Это свойство асимптотических реперов пары поверхностей Годо было доказано ранее С. П. Финиковым [4].

К каждой линии L_M на поверхности (M) можно также присоединить ∞^1 линий L_N на поверхностях (N) так, что соответствующие реперы линий L_M и L_N будут иметь общими разноименные директрисы, причем сложные отношения δ_1 и δ_2 четверок вершин на директрисах будут обратны по величине.

Линии $\pi = 0$ характеризуются тем, что для них эти четверки точек будут гармоническими ($\delta_1 = \delta_2 = -1$).

Линии $(c_2)^2 \tau + 2c_1 c_2 \nu - (c_1)^2 \sigma = 0$ характеризуются тем, что для них эти сложные отношения выражаются дробно-линейной функцией инвариантов μ и π:

$$\delta_1 = \delta_2^{-1} = -c_2 (c_1 \mu + c_2 \pi) / c_1 (c_1 \pi + c_2 \mu).$$

Дуально союзные линии ($\tau = 0$) характеризуются наличием присоединенных линий L_N, таких, что в соответствующих реперах совпадают разноименные директрисы, точка N совпадает с вершиной M_2 и точка M совпадает с вершиной N_1 репера линии L, причем L_N является союзной. Обращая эту конструкцию по принципу двойственности, получим характеристику союзных линий $\sigma = 0$.

§ 4. Линии, имеющие присоединенную линию с каноническим репером, все вершины * которого инцидентны вершинам репера данной линии, существуют лишь на поверхностях определенного вида. Поверхности класса $B^3 \gamma^2 - A^3 \beta^2 + \frac{1}{2} AB \beta^2 \gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial u \, \partial v} \log \beta / \gamma = 0$ (в обозначениях [5]), определяемого с произволом в 5 функций одного аргумента, несут ∞^1 линий, таких, что вершины M, M_1, M_2, M_3 их реперов являются соответственно вершинами N_3, N_1, N_2, N реперов линии L_N, которая также лежит на поверхности этого класса. Для L_M и для L_N имеем: $\Delta = \pi = 0$.

Поверхности класса $B^3 \gamma^2 + A^3 \beta^2 - AB \beta^2 \gamma^2 \left(\beta\gamma - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial u \, \partial v} \log \beta\gamma\right) = 0$ (произвол — 5 функций 1 аргумента) несут ∞^1 линий, таких, что вершины M, M_1, M_2, M_3 их реперов являются, соответственно, вершинами N_3, N_2, N_1, N реперов линий L_N, расположенных на поверхностях (N) этого класса. Для L_M и для L_N имеем $\Delta = \mu = 0$.

Поверхности класса $\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \gamma \varphi^3 - \frac{\partial \log \beta}{\partial v} \varphi^2 + \frac{\partial \log \gamma}{\partial u} \varphi - \beta = 0$, где

---

* Требование инцидентности трех пар вершин уже влечет за собой инцидентность и четвертой пары.

$\varphi = \frac{1}{2A}\left[-(k+l) \pm \sqrt{(k+l)^2 - 4AB}\right]$ (произвол — 6 функций 1 аргумента), несут сети линий L_M, таких, что вершины M, M_1, M_2, M_3 их реперов являются вершинами N_1, N_3, N, N_2 соответствующих реперов линий L_N, которые лежат на поверхностях класса $\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \gamma\varphi^3 - \frac{\partial \log\beta}{\partial v}\varphi^2 + \frac{\partial\log\beta}{\partial u}\varphi + \beta = 0$ (произвол тот же). Для L_n имеем $\tau = \mu = 0$. Для L_N имеем $\sigma = \mu = 0$. Конструкция, конечно, обратима.

Поступило
20 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Г. Туганов, ДАН, 30, 381 (1941). [2] Р. Н. Щербаков, ДАН, 76, 655 (1951). [3] Р. Н. Щербаков, ДАН, 76, 805 (1951). [4] С. П. Фиников, Изв. Физико-мат. об-ва при Казанск. ун-те, (3), 7 (1934—1935). [5] С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, 1937.