Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

М. Г. ХАПЛАНОВ

МАТРИЧНЫЙ ПРИЗНАК ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 5 I 1952)

В настоящей заметке показывается, что известный признак полноты* системы элементов в линейном нормированном пространстве [1] справедлив также для некоторого класса ненормированных координатных пространств бесконечного числа измерений. В частности, для пространства аналитических функций он совпадает с принципом двойственности А. И. Маркушевича, связывающим вопросы полноты и единственности аналитических функций [2].

Будем рассматривать координатные пространства бесконечного числа измерений, определив в них предел последовательности точек как $Л$-предел [3]; будем предполагать, что пространства E нормальные и линейные; говоря о линейных функционалах, непрерывность их будем понимать в том смысле, что из $x^{(n)} \to x$ (в смысле $Л$-предела в E) следует $f(x^{(n)}) \to f(x)$.

Теорема 1. *Если G — линейное множество в E и $f(x)$ — линейный функционал, определенный в G, то его можно продолжить на все пространство E.*

Прежде всего, $f(x)$ можно продолжить на замыкание $\overline{G}$, положив в точках $x = \lim_{n\to\infty} x^{(n)}$, $x^{(n)} \in G$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x^{(n)})$. Пусть $\overline{G}$ не совпадает с E и точка $x^{(0)} \in E$ лежит вне $\overline{G}$. Рассмотрим множество G_{x_0} точек $\xi = x + x^{(0)} t$, где x — произвольная точка из $\overline{G}$, а t — произвольное комплексное число; очевидно, эти точки могут быть представлены в указанном виде единственным способом.

Покажем, что если $\{\xi^{(n)}\}$, $\xi^{(n)} = x^{(n)} + x^{(0)} t_n$ — фундаментальная последовательность точек, то $\{x^{(n)}\}$ и $\{t_n\}$ также фундаментальные последовательности. Действительно, если это не верно для $\{t_n\}$, то можно найти такое $\alpha > 0$ и такую последовательность пар бесконечно растущих индексов n_1 и n_1'; n_2 и n_2'; ... ; n_k и n_k', ..., что выполняются неравенства $|t_{n_k'} - t_{n_k}| > \alpha$. С другой стороны, из фундаментальности $\{\xi^{(n)}\}$ следует, что для любой точки $v \in E^*$ и для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что при $n' > N$ и $n > N$ выполняются неравенства

$$|v(\xi^{(n')} - \xi^{(n)})| < \alpha\varepsilon. \tag{1}$$

Следовательно, при достаточно большом k $\left| v\left(\frac{x^{(n_k')} - x^{(n_k)}}{t_{n_k'} - t_{n_k}} + x_0 \right) \right| < \varepsilon$,

* Следуя А. О. Гельфонду, для пространства аналитических функций выбран термин «полнота системы» вместо термина «фундаментальное множество» С. С. Банаха.

т. е. $x^{(0)} \in \overline{G}$, что противоречит предположению. Поэтому $t_n \to t$. Из (1) заключаем, что $x^{(n)} \to x \in \overline{G}$.

Легко теперь проверить, что, выбрав произвольное комплексное число r_0 и положив $f(x + x^{(0)}t) = f(x) + tr_0$, получим продолжение заданного на G линейного функционала на множество G_{x_0}. Продолжая указанный процесс, определим $f(x)$ на всем E.

Теорема 2. *Если в пространстве E линейное множество G_1 не плотно во множестве G_2, то существует линейный функционал в E, равный нулю во всех точках множества G_1, но отличный от нуля в некоторой точке, принадлежащей множеству G_2.*

Для доказательства в предыдущем рассуждении нужно положить: $f(x) = 0$, если $x \in \overline{G}_1$; $x^{(0)} \in G_2$, но не принадлежит $\overline{G}_1$; $r_0 \neq 0$.

Теорема 3. *Чтобы последовательность точек*

$$x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots x^{(n)}, \ldots \tag{2}$$

была полной в E, необходимо и достаточно, чтобы для всякого линейного функционала $f(x)$ в E из выполнения условий

$$f(x^{(n)}) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

вытекало бы, что $f(x) = 0$ для любого $x \in E$.

Необходимость. Если последовательность (2) полна в E, то для всякого элемента $x \in E$ можно построить последовательность точек $g^{(n)}$ $g^{(n)} = \lambda_1^{(n)} x^{(1)} + \lambda_2^{(n)} x^{(2)} + \ldots + \lambda_{k_n}^{(n)} x^{(k_n)}$ ($\lambda_j^{(n)}$ — комплексные числа), такую, что $x = \lim\limits_{n\to\infty} g^{(n)}$. Из (3) следует: $f(g^{(n)}) = 0$. Поэтому $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(g^{(n)}) = 0$.

Достаточность. Точки $g^{(n)}$ при произвольных λ образуют линейное множество G в E. Если оно не плотно в E, то, согласно теореме 2, существует линейный функционал, не равный нулю во всем E и обращающийся в нуль в G, что противоречит условию теоремы.

Пусть матрица M преобразует пространство E в E_1; множество точек, в которое матрица M переводит пространство E, обозначим ME; очевидно, $ME \in E_1$ (4).

Теорема 4. *Чтобы матрица M, преобразующая пространство E в E_1, отображала множество G, плотное в E, во множество H, плотное в E_1, необходимо и достаточно, чтобы система линейных уравнений*

$$vM = \theta, \quad v \in E_1^*,$$

в пространстве E_1^* имела только нулевое решение $v = \theta$.

Необходимость. Обозначим: $Mx = y$, $x \in G$, $y \in H$. Пусть H плотно в E_1 и $vM = \theta$. Тогда $vy = v(Mx) = (vM)x = 0$, т. е. $vy = 0$ для любой точки $y \in H$. В силу плотности H в E_1 $vy = 0$ для любой точки $y \in E_1$, т. е. $v = \theta$.

Достаточность. Пусть из $vM = \theta$ следует $v = \theta$, но H не плотно в E_1. Согласно теореме 2, можно построить линейный функционал в E_1, не равный тождественно нулю во всем E_1 и равный нулю в H. Но всякий линейный функционал в E_1 можно представить в виде $f(y) = vy$, $v \in E_1^*$. Очевидно, $v \neq \theta$, так как $vy \not\equiv 0$. Из $f(y) = 0$ для $y \in H$ имеем: $vy = v(Mx) = (vM)x = 0$, $x \in G$. Так как G, по условию, плотно в E, то из $(vM)x = 0$ для $x \in G$ заключаем, что $(vM)x = 0$ для любого $x \in E$. Следовательно, $vM = \theta$. Отсюда, согласно предположению, $v = \theta$, что противоречит предыдущему.

Следствие. Чтобы матрица M, преобразующая пространство E

в E_1, отображала E во множество ME, плотное в E_1, необходимо и достаточно, чтобы система линейных уравнений $vM = \theta$ в пространстве E_1^* имела только нулевое решение $v = \theta$.

Докажем теперь теорему, обобщающую принцип двойственности А. И. Маркушевича на случай произвольного пространства E.

Теорема 5. *Чтобы система элементов*

$$Mx^{(1)}, Mx^{(2)}, \ldots, Mx^{(n)}, \ldots, \quad x^{(n)} \in E, \tag{4}$$

была полной во множестве ME, необходимо и достаточно, чтобы система функционалов

$$ux^{(1)}, ux^{(2)}, \ldots, ux^{(n)}, \ldots, \quad u \in E^*, \tag{5}$$

обладала свойством единственности во множестве $M' E_1^*$ *.

1° Пусть (4) — полная система в ME; докажем, что (4) обладает свойством единственности в $M' E_1^*$, т. е., если элемент $v^{(0)} M \in M' E_1^*$ удовлетворяет условиям:

$$(v^{(0)} M)\, x^{(1)} = 0, \quad (v^{(0)} M)\, x^{(2)} = 0, \tag{6}$$

то $v^{(0)} M = \theta$.

Для доказательства возьмем произвольную точку $x \in E$. Из полноты (4) в ME следует, что $Mx = \lim\limits_{n \to \infty} (\lambda_1^{(n)} \cdot Mx^{(1)} + \lambda_2^{(n)} \cdot Mx^{(2)} + \ldots + \lambda_{k_n}^{(n)} \cdot Mx^{(k_n)})$, или, в силу определения $Л$-предела,

$$\lim v \left(Mx - \sum_{j=1}^{k_n} \lambda_j^{(n)} \cdot Mx^{(j)} \right) = 0 \tag{7}$$

для любого $v \in E_1^*$, в частности, для $v = v^{(0)}$. Так как, согласно (6), $v^{(0)} (Mx^{(j)}) = (v^{(0)} M)\, x^{(j)} = 0$, $j = 1, 2, \ldots$, то из (7) заключаем, что $v^{(0)} (Mx) = 0$. Отсюда $(v^{(0)} M)\, x = 0$ для любого $x \in E$, т. е. $v^{(0)} M = \theta$.

2°. Пусть (5) обладает свойством единственности в $M' E_1^*$; докажем, что (4) — полная система в ME. Предположим противное. Тогда, согласно теореме 2, в пространстве E_1 существует линейный функционал $v^{(0)} y$, равный нулю в точках (4), но отличный от нуля в некоторой точке $Mx^{(0)} \in ME$, т. е. $v^{(0)} (Mx^{(k)}) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, но $v^{(0)} (Mx^{(0)}) \neq 0$. Очевидно, элемент $v^{(0)} M \in M' E_1^*$ удовлетворяет условиям (6); поэтому, согласно предположению, $v^{(0)} M = \theta$. Но тогда $v^{(0)} (Mx^{(0)}) = (v^{(0)} M)\, x^{(0)} = 0$, что противоречит предыдущему.

Следствие. Если матрица M преобразует пространство E во множество ME, плотное в E_1, то система элементов $Mx^{(1)})$, $Mx^{(2)}, \ldots$ полна в E_1 тогда и только тогда, когда система функционалов $ux^{(1)}$, $u\,(x)^{(2)}, \ldots$ обладает свойством единственности в $M' E^*_1$.

Если $E_1 = A_k$, то получим признак полноты системы аналитических функций. В частности, если $E = \overline{A}_{1/P}$, то получим принцип двойственности А. И. Маркушевича. Действительно, в этом случае матрица M определяет функцию $F(z, \zeta) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij} z^i \zeta^j$ (a_{ij} — элемент матрицы на пересечении i-й строчки и j-го столбца), аналитическую в области $|z| < R$, $|\zeta| < P$; и наоборот, всякая аналитическая функция $F(z, \zeta)$

* M' обозначает транспонированную матрицу.

определяет матрицу, преобразующую пространство $\bar{A}_{1/P}$ в A_R. Введенное А. И. Маркушевичем понятие полной функции равнозначно тому, что соответствующая матрица M преобразует пространство $\bar{A}_{1/P}$ во множество $M\bar{A}_{1/P}$, плотное в A^R.

В заключение докажем две теоремы, аналогичные подобным теоремам для базисов [5].

Теорема 6. *Пусть $\{f_k(z)\}$ — полная система в A_p, $\{\varphi_k(z)\}$ — полная система в A_R. Пусть матрица второй последовательности преобразует A_p в A_R. Образуем функции $g_k(z)$, подставляя в разложение $f_k(z)$ по степеням z вместо z^n функцию $\varphi_n(z)$. Система функций $\{g_k(z)\}$ полна в A_R.*

Действительно, матрица M последовательности $\{f_k(z)\}$ преобразует пространство φ в множество $M\varphi$, плотное в A_p. Матрица N для $\{\varphi_k(z)\}$ преобразует φ в множество $N\varphi$, плотное в A_R. Согласно следствию из теоремы 4, из $vN=\theta$ следует $v=\theta$; поэтому, согласно теореме 4, матрица N любое плотное в A_P множество преобразует в множество, плотное в A_R. Матрица последовательности $\{g_k(z)\}$ равна произведению матриц NM. Согласно той же теореме 4, матрица NM преобразует множество φ в множество, плотное в A_R.

Теорема 7. *Пусть $\{f_k(z)\}$ — полная система аналитических функций в круге $|z|<R$. Если в разложениях функций $f_k(z)$ по степеням z вместо z^n подставить $\Phi_k(z)$, $k=0,1,\ldots,$ — полиномы Фабера для некоторого континуума K, для которого $\rho<R$, то получим полную систему аналитических функций в области C_R.*

Доказательство следует из того, что полнота системы функций в пространстве функций, аналитических в C_R, сводится к полноте в пространстве A_R системы элементов, определяемых коэффициентами разложений функций системы по полиномам Фабера.

Ростовский государственный университет
им. В. М. Молотова

Поступило
26 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. С. Банах, Курс функціонального аналізу, 1948. [2] А. И. Маркушевич, Матем. сборн., **17** (59), № 2, 211 (1945). [3] М. Г. Хапланов, ДАН, **79**, № 6 (1951). [4] М. Г. Хапланов, ДАН, **80**, № 1 (1951). [5] М. Г. Хапланов, ДАН, **80**, № 2 (1951).