Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

К. СИТНИКОВ

О РАЗМЕРНОСТИ НЕЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 5 I 1952)

1. В этой работе доказывается следующее предложение, дающее решение проблемы, поставленной П. С. Александровым в 1935 г. на Московской международной топологической конференции (1).

Общая теорема о препятствиях 1. *Пусть A — произвольное множество размерности r, лежащее в n-мерном евклидовом пространстве R^n, $0 \leqslant r \leqslant n-1$. Тогда всякий Δ-цикл размерности $< n-r-1$ (по любой области коэффициентов), лежащий в $R^n \setminus A$ и ограничивающий в каком-либо открытом множестве U пространства R^n, ограничивает и в $U \setminus A$. С другой стороны, существует n-мерный открытый шар U в R^n и лежащий в $U \setminus A$ целочисленный $(n-r-1)$-мерный цикл, не ограничивающий (целочисленно) в $U \setminus A$. При этом понятия Δ-цикла и гомологии берутся в смысле, установленном мною в* (2).

В формулировке этой теоремы пространство R^n может быть заменено любым замкнутым или открытым n-мерным многообразием.

2. Теорема 1 полностью характеризует размерность произвольного множества, лежащего в n-мерном пространстве; при замкнутом A она переходит в известную теорему о препятствиях, доказанную П. С. Александровым в 1932 г (3).

3. Первая часть теоремы вытекает из усиленной деформационной теоремы, доказанной мною в § 5 работы (4), и следующего легко доказываемого предложения:

Пусть в R^n даны: произвольное r-мерное множество A и открытое множество U. Тогда множество $A \cap U$ можно внутри U продеформировать в r-мерный бесконечный полиэдр так, что эта деформация затухает при приближении к границе U.

4. Переходим к доказательству второй части. Пусть $A \subset R^n$, $\dim A = r$. При $r=0$ утверждение очевидно. Пусть $0 < r \leqslant n-1$; существует такое покрытие ω_1 множества A, что всякое барицентрическое отображение множества A в нерв ω_1 существенно покрывает некоторый r-мерный симплекс нерва ω_1. Берем для каждого элемента покрытия ω_1 высекающее его открытое множество в R^n так, чтобы получилось покрытие ω, подобное покрытию ω_1. Возьмем отображение f_1 окрестности $OA = \tilde{\omega}$ (сумма элементов покрытия ω) на r-мерный замкнутый симплекс T^r, существенное на A. Отображение f_1 аппроксимируем достаточно хорошо симплициальным отображением f_2 некоторой триангуляции K множества OA в некоторую триангуля-

цию Q симплекса T^r. Пусть T_0^r — симплекс комплекса Q, содержащий центр симплекса T^r. Через φ обозначим отображение симплекса T^r на себя, состоящее в том, что T_0^r растягивается на T^r, а кольцо $\overline{T^r \setminus T_0^r}$ симплициально отображается на границу $\dot{T}$ симплекса T^r. Отображение $f = \varphi f_2$ есть симплициальное отображение триангуляции K на комплекс, состоящий из симплекса T^r и его граней; в предположении, что отображение f_2 достаточно хорошо приближает отображение f_1, отображение f существенно на A. Обозначим через K^* комплекс $f^{-1}\dot{T} \subset K$.

5. Мы доказали в первой части, что всякий Δ-цикл размерности $< n - r - 1$, лежащий в $U \setminus A$ и ограничивающий в U, ограничивает и в $U \setminus A$. Предполагая теперь, что это имеет место и для циклов размерности $n - r - 1$ (область коэффициентов — целые числа), мы придем к противоречию, а именно, выведем из нашего предположения возможность продолжить отображение f полиэдра $\tilde{K}^*$ в $\dot{T}$ на множество A. Этим доказательство нашей теоремы будет завершено*.

6. При отображении f весь $(r-1)$-мерный остов комплекса K отображен в $\dot{T}$. На открытом подкомплексе $K \setminus K^*$ определится поэтому (вообще говоря бесконечный) ∇-цикл z^r, принимающий на r-мерных симплексах $t^r \in K \setminus K^*$ значения, равные степеням, с которыми границы этих симплексов отображаются на ориентированную границу симплекса T^r. Дуальный к z^r бесконечный Δ-цикл $z^{n-r} = \Sigma c_i t_i^{n-r}$ лежит также на $\tilde{K} \setminus \tilde{K}^*$. Основная часть дальнейших рассуждений заключается в том, что в некоторой окрестности $V \subset OA$ цикла z^{n-r}, замыкание которой в OA есть полиэдр и лежит вне $\tilde{K}^*$, строится такое не пересекающееся с A замкнутое в OA множество F, что цикл z^{n-r}, п о д р а з д е л е н н ы й в смысле (²) некоторой триангуляцией X бесконечного полиэдра $\overline{V} \setminus F$, оказывается в X гомологичным нулю. Для построения V мы берем вокруг каждого симплекса t_i^{n-r} цикла z^{n-r} полиэдральную выпуклую окрестность $V_i^{(n-r)}$ с замыканием, лежащим вне $\tilde{K}^*$; выбор этих окрестностей подчиняется условию, чтобы никакой симплекс комплекса K не пересекался с бесконечным числом $V_i^{(n-r)}$. М н о ж е с т в о $V = \bigcup_i V_i^{(n-r)}$ и я в л я е т с я и с к о м о й о к р е с т н о с т ь ю ц и к л а z^{n-r}. Окрестности $V_j^{(k)}$ определяются и для неглавных симплексов t_j^k цикла z^{n-r} как пересечение тех $V_i^{(n-r)}$, которые соответствуют всем t_i^{n-r} из z^{n-r}, входящим в звезду данного t_j^k.

7. Множество F определяется как сумма строящихся постепенно компактов $\Phi_i^{(k)} \subset V_j^{(k)}$, соответствующих симплексам t_j^k цикла z^{n-r}.

Пусть t_i^0 — нульмерный симплекс (вершина) цикла z^{n-r}. Берем некоторую отличную от точки t_i^0 точку $\Phi_i^0 \subset V_i^{(0)} \setminus A$ и триангуляцию $X_i^{(0)}$ множества $\overline{V}_i^{(0)} \setminus \Phi_i^{(0)}$. В $X_i^{(0)}$ цикл $t_i^{(0)}$ ограничивает цепь x_i^1, получающуюся от подразделения посредством комплекса $X_i^{(0)}$ открытого в сторону $\Phi_i^{(0)}$ отрезка с концами t_i^0 и $\Phi_i^{(0)}$. Сделав это построение для всех вершин t_i^0 цикла z^{n-r}, возьмем триангуляцию $X^{(0)}$ множества $\overline{V} \setminus \bigcup_i \Phi_i^{(0)}$, с о г л а с о в а н н у ю с о в с е м и $X_i^{(0)}$ в том смысле, что каждый симплекс комплекса $X^{(0)}$ лежит на некотором симплексе каждой из тех триангуляций $X_i^{(0)}$ (в конечном числе), с телом

* Мы его даем, таким образом, в несколько ослабленной форме, не доказывая, что за U можно взять шар; это последнее утверждение достигается незначительным усложнением наших рассуждений.

которых он пересекается. Будем условно называть «симплексами» t^k цикла z^{n-r} не сами эти симплексы, а цепи, полученные из них посредством подразделения (все время в смысле ([2])) посредством комплекса $X^{(0)}$. Все соотношения инцидентности при этом, очевидно, сохраняются.

Пусть $t_i^1 = (t_j^0 t_k^0)$ — одномерный «симплекс» цикла z^{n-r}. Присоединяя к t_i^1 цепи x_j^1 и x_k^1, подразделенные в $X^{(0)}$, получим бесконечный одномерный цикл w_i^1 триангуляции $X^{(0)}$ и нульмерный цикл Γw_i^1 (см. ([2]), § 4), лежащий на паре точек $\Phi_j^{(0)} \cup \Phi_k^{(0)}$. Вследствие сказанного выше, имеется компакт $\Phi_i^{(1)} \subset \overline{V}_i^{(1)} \setminus A$, на котором Γw_i^1 ограничивает. Возьмем триангуляцию $X_i^{(1)}$ множества $\overline{V}_i^{(1)} \setminus \Phi_i^{(1)}$, согласованную с триангуляцией $X^{(0)}$. Подразделение цикла w_i^1 в $X^{(1)}$ ограничивает в $X_i^{(1)}$ цепь x_i^2 (см. ([2]), § 4). Предполагая эти построения выполненными для всех одномерных симплексов цикла z^{n-r}, берем триангуляцию $X^{(1)}$ множества $\overline{V} \setminus \bigcup\limits_i \Phi_i^{(1)}$, согласованную со всеми $X_i^{(1)}$, и снова заменяем все «симплексы» цикла z^{n-r} и всех рассматриваемых цепей их подразделениями в $X^{(1)}$. Переходим к двумерным «симплексам» t_i^2 цикла z^{n-r}. Пусть $\Delta t_i^2 = t_h^1 + t_j^1 + t_k^1$. Из предыдущих построений вытекает, что $\Delta t_i^2 = w_h^1 + w_j^1 + w_k^1$. Присоединяя к t_i^2 цепи x_h^2, x_j^2, x_k^2, получим бесконечный цикл w_i^2. Аналогично предыдущему находим компакт $\Phi_i^{(2)} \subset V_i^{(2)} \setminus A$ и триангуляцию $X_i^{(2)}$ множества $\overline{V}_i^{(2)} \setminus \Phi_i^{(2)}$, согласованную с триангуляцией $X^{(1)}$ так, что подразделение цикла w_i^2 в $X_i^{(2)}$ ограничивает в $X_i^{(2)}$.

Построение, очевидно, продолжается и приводит к компактам $\Phi_i^{(n-r)} \subset \overline{V}_i^{n-r} \setminus A$, триангуляциям $X_i^{(n-r)}$ множеств $\overline{V}_i^{(n-r)} \setminus \Phi_i^{(n-r)}$ и бесконечным циклам w_i^{n-r}, ограничивающим в этих триангуляциях. Обозначая через F сумму всех $\Phi_i^{(n-r)}$, берем триангуляцию X множества $\overline{V} \setminus F$, согласованную со всеми $X_i^{(n-r)}$, и заменяем w_i^{n-r} их подразделениями в X. Цикл z^{n-r} после подразделения в X превращается в $\Sigma c_i w_i^{n-r}$, что мы обозначаем снова через z^{n-r}. Так как каждое $w_i^{n-r} \sim 0$ в X_i^{n-r}, то $z^{n-r} \sim 0$ в X, чем цель, поставленная в § 6, достигнута.

8. Каждый симплекс триангуляции K пересекается лишь с конечным числом лежащих на границе V симплексов комплекса X. Поэтому комплекс X можно дополнить до триангуляции K' множества $OA \setminus F$; при этом можно потребовать, чтобы $K^* \subset K'$ (т. е. чтобы симплексы K^* оставались неподразделенными). Цикл z^{n-r} ограничивает в $K' \setminus K^*$.

Рассуждения из ([2]), § 2 доказывают, что и (подразделенный) ∇-цикл z^r ограничивает в $K' \setminus K^*$. Отсюда следует, что отображение f полиэдра $\tilde{K}^*$ в $\dot{T}$ может быть продолжено на r-мерный остов комплекса K'. Но r-мерное множество A лежит в $\tilde{K}'$; оставляя лежащие в $\tilde{K}^*$ точки этого множества неподвижными, можно его остальную часть продеформировать сначала в r-мерный полиэдр, а затем в r-мерный остов комплекса K', откуда следует возможность продолжить отображение f полиэдра K^* в $\dot{T}$ на множество A. Теорема доказана.

9. По поводу естественно возникающего вопроса о взаимоотношениях между доказанной выше теоремой о препятствиях и законом двойственности, доказанным мною в ([2]), можно сказать следующее. Очевидно, для применений к теории размерности закон двойственности должен быть усилен в смысле перенесения его на множества, лежащие в открытых многообразиях. Такое усиление дано в следующем предложении.

Теорема 2. *Пусть A — множество, лежащее в n-мерном открытом многообразии M, ациклическом в данных размерностях q и $q+1$, $0 \leqslant q \leqslant n-1$. Сохраняя данное в* (²) *определение Δ-цикла и гомологии и вытекающее из него определение Δ-групп, будем при определении ∇-групп в* (²) *допускать лишь такие цепи (циклы и пленки) на нервах покрытий ω, которые равны нулю вне некоторого компакта Φ (т. е. равны нулю на симплексах, вершины которых суть элементы покрытия ω, пересекающиеся с $M \setminus \Phi$). При таком определении ∇-групп имеем, как и в* (²), *изоморфизм между группами $\nabla^p(A, \mathfrak{G})$ и $\Delta^q(B, \mathfrak{G})$, где $B = M \setminus A$ и $p = n - q - 1$.*

Первое утверждение теоремы о препятствиях для шара U легко выводится из теоремы 2. Что касается второго утверждения, то его выводу из закона двойственности должна предшествовать характеристика размерности посредством гомологических инвариантов, опирающихся на бесконечные покрытия. Из теоремы о существенных отображениях легко вытекает теорема 3, дающая такую характеристику:

Теорема 3. *Пусть $\dim A = r$; тогда r есть наибольшее число, обладающее следующим свойством: существуют открытые в A множества G, H, $\overline{H} \subseteq G$ (замыкание — в A) и такое покрытие ω множества G, что на нерве ω имеется r-мерный целочисленный ∇-цикл z, который лежит в H (т. е. может быть не равен 0 лишь на симплексах нерва ω, все вершины которых суть элементы ω, содержащиеся в H) и который не ограничивает никакой лежащей в H цепи, причем это свойство цикла z сохраняется при его проекциях $\pi^{\omega}_{\omega'}$ в любое более мелкое покрытие ω' множества G.*

Теорему 3 можно усилить, предполагая при $A \subset R^n$, что G есть пересечение с A некоторого открытого шара U, что H находится от $R^n \setminus U$ на расстоянии > 0 и z не ограничивает никакой цепи, лежащей в каком-либо H', $\overline{H'} \subseteq G$. Второе утверждение теоремы 1 следует из теоремы 2 и усиленной теоремы 3. Однако единственное известное мне доказательство усиленной теоремы 3 в основном повторяет доказательство теоремы 1, так что применение закона двойственности к доказательству этой последней не дает каких-либо преимуществ.

Поступило
25 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Александров, Матем. сборн., 1 (43), 619 (1936). [2] К. Ситников, ДАН, 81, № 3, 359 (1951). [3] П. Александров, Math. Ann., 106, 161 (1932); Успехи матем. наук, 4, в. 6, 18 (1950). [4] К. Ситников, ДАН, 82, № 6 (1952).