Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

М. В. ПЕНТКОВСКИЙ

ПРИБЛИЖЕННЫЕ НОМОГРАММЫ ИЗ ВЫРАВНЕННЫХ ТОЧЕК С ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ ШКАЛАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 31 XII 1951)

Классический метод построения номограмм из выравненных точек применим не для всех уравнений. Ограничения вытекают из условия, что три помеченные точки должны лежать на одной прямой, когда их пометки удовлетворяют уравнению. Требование точного выполнения этого условия необосновано, ибо при вычислениях по номограммам его невозможно практически осуществить. Проведение разрешающих прямых связано с неизбежными погрешностями и вычисления носят приближенный характер, что вполне соответствует назначению номограмм.

Естественно поэтому перейти к номограммам из выравненных точек, где условие номографирования выполнено приближенно: на одной прямой лежат точки, пометки которых удовлетворяют уравнению с известной степенью точности. М. Л. Франком [1] и М. А. Городским [2] были предложены графические способы построения приближенных номограмм и И. Н. Денисюком [3] — аналитический. Во всех трех работах авторы не указывают оценки погрешности приближения. Излагаемый ниже метод построения приближенных номограмм основан на точном номографировании вдоль трех линий области изменения независимых переменных и приближенном — в остальной ее части. Приближение оценивается по величине наибольшего значения погрешности аппроксимации для заданного способа оценки точности вычислений.

Приближенное номографирование может найти применение также и в случае, когда точная номограмма возможна, но геометрическая структура ее ведет к значительным погрешностям в нахождении положения ответной точки и не позволяет обеспечить необходимую точность вычислений. Принятая схема приближенных номограмм свободна от такого недостатка. Погрешности вычислительных операций здесь минимальны.

Пусть номографируемое уравнение

$$F(u, v, w) = 0, \tag{1}$$

ответным переменным является v и область номографирования определяется неравенствами:

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \quad w_1 \leqslant w \leqslant w_2.$$

Построим две параллельные шкалы переменных u и v, уравнения которых:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = y_1(u);$$

$$x_2 = H, \quad y_2 = y_2(v).$$

Функцию $y_2(v)$ определяем из условий, чтобы ответная шкала имела постоянную характеристику, соответствующую принятому способу оценки точности ответа, и необходимую длину [4]. Если оценка погрешности дается неравенством:

$$\left|\frac{\Delta v}{f(v)}\right| < \delta,$$

то

$$y_2(v) = \frac{L_v}{\int\limits_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{f(v)}} \int\limits_{v_1}^{v} \frac{dv}{f(v)},$$

где L_v — длина шкалы v.

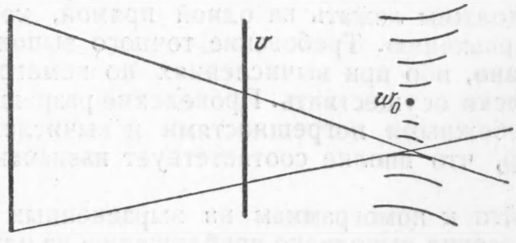

Рис. 1

Функцию $y_1(u)$ выбираем так, чтобы при $w = w_0$ номографирование выполнялось точно для всех значений u. Для этого проектируем шкалу v из точки с пометкой w_0 на ось y. Получим:

$$y_1(u) = \lambda_0 [y_2(\dot{v}') - y_2(\dot{v})],$$

где $\dot{v}$ — значение v из (1) при $w = w_0$ и $\dot{v}'$ — значения $\dot{v}$ при $u = u_1$, причем абсцисса точки w_0 равна:

$$x_{3_0} = \frac{\lambda_0}{1 + \lambda_0},$$

а ордината взята такой, что $y_1(u_1) = 0$.

Находя огибающие разрешающих прямых при $w = \mathrm{const}$, получим семейство кривых, изображающих значения переменного w. Их уравнения:

$$x_3 = \frac{dy_1}{dy_1 - dy_2}, \tag{2}$$

$$y_3 = \frac{y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{dy_1 - dy_2}, \tag{3}$$

где параметром можно считать u. Области номографирования будут соответствовать дуги, для которых $u_1 \leqslant u \leqslant u_2$. Такая номограмма называется номограммой с контактом касания [5]. Она изображена на рис. 1.

Далее будем рассматривать только случай, когда дуги w не имеют точек перегиба и возврата. Для этого выражения $d(y_1 - y_2)$ и $dy_1 d^2y_2 - dy_2 d^2y_1$ не должны менять знак.

Заменим каждую из дуг точкой, приписав ей ту же пометку. Совокупность таких точек образует шкалу переменного w, которая вместе со шкалами u и v составит приближенную номограмму уравнения (1). Все разрешающие прямые, касающиеся данной дуги w, проходят через область, ограниченную этой дугой и касательными к ней в точках u_1 и u_2. Обозначим точку пересечения касательных P. Проведем через нее прямую, параллельную оси y. Пусть точка пересечения ее с дугой N (рис. 2). Средину отрезка PN примем за точку, заменяющую дугу. Обозначим ее Q. Координаты точки Q:

$$x_Q = x_P, \quad y_Q = \frac{1}{2}(y_P + y_N), \tag{4}$$

где

$$x_P = \frac{L_u}{y_2(v') - y_2(v'') + L_u},$$

$$y_P = \frac{L_u y_2(v')}{y_2(v') - y_2(v'') + L_u}$$

и L_u — длина шкалы u; v' и v'' находятся из уравнения (1), когда u соответственно равно u_1 или u_2. Для вычисления y_N следует в уравнение (3) подставить значение параметра u_N точки N. u_N находится из условия

$$x_P = x_3.$$

Выражения (4) являются уравнениями шкалы w, когда $w_1 \leqslant w \leqslant w_2$.

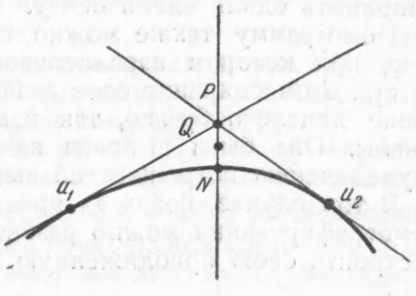

Рис. 2

Наибольшая геометрическая погрешность Δl нахождения ответной точки на шкале v при принятом способе аппроксимации для данной дуги w равна длине проекции половины отрезка PN из точки на шкале u на носитель шкалы v:

$$\Delta l = \frac{1}{2|x_P|}\left| y_P - y_N \right|.$$

Ее величина достигается при u_1, u_N и u_2. В точках u' $(u_1 < u' < u_N)$ и u'' $(u_N < u'' < u_2)$ геометрическая погрешность равна нулю. В этих точках номографирование выполняется точно и линии $u = u'(w)$ и $u = u''(w)$ являются линиями точного номографирования в данной области.

Погрешность в определении ответа при данном значении w будет равна цене деления шкалы v, длина которого равна геометрической погрешности в определении положения ответной точки. Она будет иметь вид:

$$\left| \frac{\Delta v}{f(v)} \right| = \varepsilon,$$

где ε пропорционально величине геометрической погрешности и не зависит от v, так как ответная шкала имеет постоянную характеристику типа, соответствующего принятому способу оценки точности ответа. ε принимает наибольшее значение ε_w, когда геометрическая погрешность равна Δl. Из уравнения шкалы v получим:

$$\Delta v = \frac{\Delta l \left| \int\limits_{v_1}^{v_2} \frac{dv}{f(v)} \right|}{L_v} \left| f(v) \right|,$$

откуда

$$\varepsilon_w = \frac{\Delta l}{L_v}\left|\int\limits_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{f(v)}\right|;$$

ε_w есть функция лишь w и w_0. Погрешность аппроксимации не зависит от геометрических размеров первоначального построения (величин L_v и H) и положения точки w_0 на плоскости номограммы.

Значение w_0 находится из условия, чтобы верхняя грань значений ε_w в области номографирования была наименьшей. λ_0 является параметром проективного преобразования номограммы, при котором остается точечно инвариантной шкала v, сохраняется параллельность шкал u и v и расстояние между ними. Это гомология с центром в начале координат и осью — носителем шкалы v. Выбирая соответствующее значение λ_0, шкалам номограммы можно придать необходимое взаиморасположение. L_v и H находятся из конечных размеров чертежа номограммы. Возможно, что будет необходимо дополнительно выполнить сдвиг вдоль оси y.

Номограмму также можно подвергать проективному преобразованию, при котором параллельность шкал будет нарушена. Величина ε_w при этом сохранит свое значение. Но применять такое преобразование нецелесообразно, так как изменится характеристика ответной шкалы. Она была выбрана наивыгоднейшей, и изменения приведут к увеличению погрешностей вычислительных операций.

В том случае, когда ε_w превышает допустимую величину, область номографирования можно разбить на части и для каждой из частей построить свою приближенную номограмму.

Поступило
31 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Л. Франк, Тр. Ленинградск. индустриальн. ин-та, раздел физ.-мат., 10 : 3 (1936). [2] М. А. Городский, Уч. зап. МГУ, в. 28 (1939). [3] И. Н. Денисюк, Уч. зап. МГУ, в. 28 (1939). [4] М. В. Пентковский, Номография, 1949. [5] D'Ocagne, Traité de Nomographie, Paris, 1921, p. 160.