

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

К ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 XII 1951)

1. Рассмотрим задачу Дирихле для единичного круга σ : требуется найти гармоническую в σ функцию $u(\rho, \theta)$, принимающую на границе $\rho = 1$ заданные значения

$$u(1, \theta) = f(\theta). \quad (1)$$

Вариационный метод Римана решения этой задачи заключается в том, что искомое решение находится как функция, для которой достигается минимума интеграл

$$D[F] = \iint_{\sigma} \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \rho \, d\rho \, d\theta \quad (2)$$

среди всевозможных функций F , принимающих заданные граничные значения (1) и имеющих частные производные первого порядка с конечным интегралом (2). Однако еще Вейерштрасс заметил, что граничные условия могут допускать решение задачи Дирихле, в то время как вариационным методом при этих граничных условиях задачу Дирихле решить невозможно. Именно, может оказаться, что для гармонической функции, соответствующей заданным, даже непрерывным, граничным условиям, интеграл (2) просто не будет конечным, как это, например, имеет место для известной функции Гадамара ((1), стр. 106)

$$f(\theta) = \sum_1^{\infty} \frac{\cos k^4 \theta}{k^2}. \quad (3)$$

В качестве выхода из положения было доказано (1, 2), что если существует какая угодно функция F , удовлетворяющая условиям (1) и (2), то существует гармоническая функция, удовлетворяющая этим условиям, и задача Дирихле может быть решена вариационным методом. Однако остался открытым вопрос, для каких же функций $f(\theta)$ такое продолжение пограничной функции возможно и для каких нет. Ниже мы приводим ответ на него.

Теорема 1. Если гармоническая в круге $\rho < 1$ функция $u(\rho, \theta)$ суммируема на нем и для нее интеграл $D[u]$ конечен, то почти для всех θ существует предел

$$\lim_{\rho \rightarrow 1} u(\rho, \theta) = f(\theta) = u(1, \theta),$$

где $f(\theta)$ принадлежит к пространству L_2 суммируемых со своим квадратом на $(0, 2\pi)$ функций и удовлетворяет для любых h неравенству

$$\left(\int_0^{2\pi} |f(\theta + h) - f(\theta)|^2 d\theta \right)^{1/2} \leq M |h|^{1+\varepsilon} \quad (4)$$

при $\varepsilon = 0$.

Таким образом, если функция f не принадлежит к L_2 или принадлежит к L_2 , но заведомо не удовлетворяет (4) при $\varepsilon = 0$, то не существует гармонической функции u , для которой имеет место (1) и (2).

Это же обстоятельство имеет место и для многих функций $f \in L_2$, удовлетворяющих (4) при $\varepsilon = 0$. Например, для функции, равной 0 и 1 соответственно на интервалах $0 \leq \theta \leq \pi$, $\pi < \theta < 2\pi$.

С другой стороны, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Если $f \in L_2$ и имеет место (4) при $\varepsilon > 0$, то функция $f(\theta)$ непрерывна и для соответствующей ей непрерывной в замкнутом круге гармонической функции интеграл (2) конечен.

Вытекающая из условия теоремы 2 непрерывность f и даже подчинение условию Липшица положительной степени следует из теоремы 12 (4) (см. еще (6)).

Заметим, что функция Гадамара (3), хотя и непрерывна, но не удовлетворяет неравенству (4) уже при $\varepsilon > -1/8$.

2. Рассмотрим при данном $\varepsilon > 0$ класс функций $f \in L_2$, для которых выполняется неравенство (4) при всех h , и обозначим через $M_\varepsilon(f)$ наименьшую константу M , для которой выполняется (4) при всех h .

Теорема 3. Справедливо неравенство

$$D[u] \leq C M_\varepsilon^2(f), \quad (5)$$

где u обозначает гармоническую в круге функцию, равную на его границе $f(\theta)$, а C — константа, зависящая от ε , но не от f .

Таким образом, величина $M_\varepsilon(f)$ представляет собой естественную норму для граничной функции f , малость которой влечет за собой малость «энергии» $D[u]$ системы соответствующей функции u .

Задача об отклонении мембраны может служить примером физической задачи, где искомое решение u (отклонение мембраны от равновесия) есть гармоническая функция, для которой интеграл $D[u]$, равный потенциальной энергии деформации мембраны, должен быть конечным. Для таких задач, конечно, неестественно считать, что граничные условия принадлежат к классу произвольных непрерывных функций. В качестве таких естественных классов можно брать (расширяющиеся вместе с убыванием ε к нулю) классы функций $f \in L_2$, определяемых при $\varepsilon > 0$ условием (4), которые, как мы знаем, непрерывны. Устойчивость самой гармонической функции может быть обеспечена гарантией достаточной малости уклонений ее на границе в метрике C , устойчивость же «энергии» функции u гарантируется малостью уклонений функции f в метрике $M_\varepsilon(f)$. Заметим, что класс функций $f \in L_2$, для которых имеет место (4), образует пространство типа (B) с метрикой $M_\varepsilon(f)$.

3. Сформулируем еще соответствующие результаты для полупространства $x_n > 0$ n -мерного пространства (x_1, \dots, x_n) , пользуясь терминологией, которая употреблялась в (3) или (4).

Теорема 4. Если $u(x_1, \dots, x_n)$ гармоническая в полупространстве $x_n > 0$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} u(x_1, \dots, x_n)^2 dx_1 \dots dx_{n-1} \leq M \text{ для любого } x_n > 0, \quad (6)$$

$$D[u] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \sum_1^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right)^2 dx_1 \dots dx_n < \infty, \quad (7)$$

то граничная функция, определенная для почти всех (x_1, \dots, x_{n-1}) ,

$$\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) = \lim_{x_n \rightarrow 0} u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \quad (8)$$

необходимо принадлежит к классу $H_2^{(1/2, \dots, 1/2)}$.

Теорема 5. Если $\varepsilon > 0$ и $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \in H_2^{(1/2+\varepsilon, \dots, 1/2+\varepsilon)}$, то существует гармоническая функция u , удовлетворяющая условиям (6), (7) и (8). При $n=2$ $\varphi(x_1)$ (а вместе с ней и $u(x_1, x_2)$) непрерывна и даже удовлетворяет условию Липшица положительной степени.

Поступило
4 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950. ² Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 2, 1945. ³ С. М. Никольский, ДАН, 76, 785 (1951). ⁴ С. М. Никольский, Тр. Матем. ин-та АН СССР, 38, 244 (1951). ⁵ С. М. Никольский, ДАН, 82, № 4 (1952). ⁶ G. H. Hardy и J. E. Littlewood, Math. Zs., 28, 613 (1928).