Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

В. К. НАТАЛЕВИЧ

О НЕЛИНЕЙНОМ СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ И НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 5 I 1952)

§ 1. В настоящей работе рассматривается следующее нелинейное сингулярное интегральное уравнение:

$$a(s)\,u(s)-\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=$$

$$=f_1(s)+\Phi_1\left(s,\,u(s),\,-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma,\lambda\right), \tag{1}$$

представляющее собою обобщение уравнения, разобранного А. И. Гусейновым в работе (1). Это обобщение позволяет выяснить существенные особенности нелинейных сингулярных уравнений, которые отличают их от регулярных нелинейных уравнений.

Главное различие, как это будет показано далее, заключается в том, что разрешимость и число решений уравнения (1) зависят от разрешимости и числа решений соответствующего однородного линейного уравнения и, в конечном счете, от индекса комплексного выражения $a(s)+ib(s)$.

Предварительно рассматривается уравнение, не содержащее линейного члена:

$$U(s)=f(s)+\Phi\left(s,\,U(s),\,-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma,\,\lambda\right).$$

Доказательство существования решения этого последнего уравнения может быть проведено на основе принципа Шаудера, аналогично тому как это сделано в работе (1). Ограничения, налагаемые на функцию $\Phi(s, u, v, \lambda)$, совпадают в основном с теми, которые формулируются А. И. Гусейновым (1).

Коэффициенты $a(s)$ и $b(s)$ уравнения (1) будем считать функциями, удовлетворяющими условию Гельдера и не обращающимися одновременно в нуль; ради простоты формул, что не ограничивает общности, положим $a^2(s)+b^2(s)=1$.

По формуле, связывающей краевые значения двух сопряженных гармонических функций, имеем

$$v(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\sigma)\,d\sigma. \qquad (2)$$

Положив $\int_0^{2\pi} v(\sigma)\,d\sigma = 0$, получим, что уравнение (1) эквивалентно нелинейной краевой задаче

$$a(s)\,u(s) + b(s)\,v(s) = f_1(s) + \Phi_1(s, u(s), v(s), \lambda) \qquad (3)$$

при дополнительном условии

$$\int_0^{2\pi} v(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

§ 2. Рассмотрим случай $\operatorname{Ind}[a(s) + ib(s)] = 0$. Пусть $ie^{i\gamma(s)} = \xi(s) + i\eta(s)$ — контурное значение функции, являющейся решением однородной краевой задачи Гильберта

$$a(s)\,\xi(s) + b(s)\,\eta(s) = 0$$

(см., например, [2]). Тогда, вводя новую аналитическую функцию $U + iV$ при помощи подстановки

$$U + iV = e^{-i\gamma}(u + iv),$$

приведем краевое условие (3) к виду

$$U(s) = f(s) + \Phi(s, U, V, \lambda), \qquad (4)$$

где $\Phi(s, U, V, \lambda) = \Phi_1(s, \eta U + \xi V, \; -\xi U + \eta V, \lambda)$.

Пользуясь формулой (2), сведем краевую задачу (4) к следующему сингулярному уравнению:

$$U(s) = f(s) + \Phi\left(s, U, -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma + C, \lambda\right),$$

причем $C = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(\sigma)\,d\sigma$.

Методом последовательных приближений это уравнение может быть разрешено, и в качестве его решения будем иметь:

$$U(s, C, \lambda) = f(s) + \varphi(s, C, \lambda),$$

если выполнено условие $\int_0^{2\pi} V(s)\,ds = 0$. Последнее можно представить в виде:

$$\Psi(\lambda, C) = C\int_0^{2\pi} \eta(s)\,ds +$$

$$+ \int_0^{2\pi} [f(\sigma) + \Phi(\sigma; U(\sigma, C, \lambda); \; V(\sigma, C, \lambda); \lambda)]\,d\sigma \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \xi(\sigma)\,d\sigma = 0. \qquad (5)$$

Постоянная C определяется, таким образом, уравнением $\Psi(\lambda, C) = 0$ как неявная функция параметра λ.

Возможны два случая:

1) Если $\int\limits_0^{2\pi} \eta(s)\,ds \neq 0$, т. е. линейное однородное сингулярное уравнение, соответствующее (1), неразрешимо ([2]), то условие (5) дает уравнение, из которого единственным образом определяется C как функция параметра λ. Нелинейное уравнение (1) имеет тогда единственное решение.

2) Если $\int\limits_0^{2\pi} \eta(s)\,ds = 0$, т. е. соответствующее линейное однородное уравнение разрешимо, то уравнение (1) разрешимо, если выполнено условие

$$\int\limits_0^{2\pi} [f(\sigma) + \Phi(\sigma;\, U(\sigma, C, \lambda);\, V(\sigma, C, \lambda);\, \lambda)]\, d\sigma = 0.$$

Последнее будет представлять собой уравнение относительно C, не содержащее членов с первой степенью C, и будет являться уравнением функциональных разветвлений.

Таким образом, случай нулевого индекса аналогичен регулярным нелинейным уравнениям типа Шмидта ([3]), которые в иной форме впервые были рассмотрены Ляпуновым.

§ 3. Пусть $\operatorname{Ind}[a(s) + ib(s)] = +n > 0$.

Введем новую функцию $U + iV$ посредством соотношения

$$(u + iv)\, z^{-n}\, e^{-i\gamma(z)} Q(z) = U + iV, \tag{6}$$

где $Q(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} (c_k z^k - \bar{c}_k z^{-k}) + \beta_0 i$, c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — произвольные комплексные постоянные; β_0 — произвольная вещественная постоянная. $Q(z)$ имеет в начале координат полюс до n-го порядка и вещественная часть ее на контуре равна нулю.

Переходя в соотношении (6) к контурным значениям и отделяя затем вещественную и мнимую части, получим выражения функций $u(s)$ и $v(s)$ через $U(s)$ и $V(s)$. Подставляя их в (3), придем к следующей краевой задаче:

$$U(s) = f(s) + \Phi(s, U, V, C, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \lambda),$$

которая, при использовании формулы (2), сведется к нелинейному сингулярному интегральному уравнению

$$U(s) = f(s) + \Phi\Big(s, U, -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} U(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\, d\sigma + C, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n\Big).$$

Последнее может быть решено методом последовательных приближений.

Из (6) следует, что постоянная β_0 может быть определена. Условие $\int\limits_0^{2\pi} v(s)\,ds = 0$ дает возможность одну из $2n + 1$ произвольных постоянных выразить через $2n$ остальных. Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема. *Нелинейное сингулярное интегральное уравнение* (1) *в случае* $\operatorname{Ind}[a(s) + ib(s)] = +n > 0$ *имеет решение, содержащее* $2n$ *произвольных постоянных.*

§ 4. В случае отрицательного индекса комплексного выражения $a+ib$ аналогичным путем может быть установлена следующая теорема:

Теорема. *Нелинейное сингулярное интегральное уравнение* (1) *при* $\operatorname{Ind}[a(s)+ib(s)]=-n<0$, *вообще говоря, неразрешимо. Оно будет иметь единственное решение лишь при выполнении* $2n$ *условий разрешимости.*

Во всех трех случаях решения могут быть получены методом последовательных приближений для малых значений параметра λ. Случаи положительного и отрицательного индекса существенным образом отличают нелинейные сингулярные интегральные уравнения от нелинейных регулярных интегральных уравнений.

§ 5. Решение нелинейной краевой задачи (3) мало отличается от решения сингулярного уравнения (1). И здесь разрешимость и число решений ее зависят от индекса соответствующей однородной задачи, т. е. от индекса комплексной функции $a(s)+ib(s)$. Различие заключается лишь в том, что здесь отсутствует условие $\int\limits_0^{2\pi} v(s)\,ds=0$.

Оказывается, что:

1) В случае $\operatorname{Ind}[a(s)+ib(s)]=0$ нелинейная краевая задача (3) имеет решение, зависящее от одной произвольной постоянной.

2) В случае $\operatorname{Ind}[a(s)+ib(s)]=+n>0$ задача (3) имеет решение, зависящее от $2n+1$ произвольных постоянных.

3) В случае $\operatorname{Ind}[a(s)+ib(s)]=-n<0$ задача (3), вообще говоря, неразрешима. Для ее разрешимости требуется выполнение $2n-1$ условий. Если последние выполнены, то существует единственное решение.

Во всех трех случаях решения могут быть получены методом последовательных приближений для малых значений параметра λ.

При написании работы я получил весьма ценные указания и советы от проф. Ф. Д. Гахова, которому выражаю свою глубокую благодарность.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
4 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. И. Гусейнов, Матем. сборн., **26** (68) :2 (1950). [2] Ф. Д. Гахов, Изв. Казанск. физ.-мат. об-ва, сер. 3, **14** (1949). [3] L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differential-Gleichungen, 1931.