Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 1

*МАТЕМАТИКА*

И. Ф. ЛОХИН

# О ФУНКЦИЯХ, ПРЕДСТАВИМЫХ РЯДАМИ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ

*(Представлено академиком М. В. Келдышем 7 I 1952)*

Пусть возрастающая последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=\sigma<\infty. \tag{1}$$

Такую последовательность обычно называют измеримой. Пусть, далее последовательность полиномов

$$P_n(z)=\sum_{\nu=1}^{n}a_{n\nu}e^{-\lambda_\nu z} \tag{2}$$

сходится равномерно в области, которая содержит внутри себя отрезок длиной $2\pi\sigma$, параллельный мнимой оси. Тогда, как это показано А. Ф. Леонтьевым ([1]), предельная функция $F(z)$ будет регулярна в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} z>\gamma$, причем в любом угле $|\arg(z-z_0)|\leqslant\alpha<\pi/2$, $\operatorname{Re} z_0>\gamma$, эта функция ограничена. Последовательность (2) будет также сходиться в полуплоскости $\operatorname{Re} z>\beta$, $\beta\geqslant\gamma$, причем в любой ограниченной области из этой полуплоскости равномерно.

Существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty}a_{n\nu}=A_\nu,\quad \nu=1,2,\ldots, \tag{3}$$

и числа $A_\nu$ единственным образом определяют функцию $F(z)$. Таким образом, ряд Дирихле $\sum\limits_{1}^{\infty}A_n e^{-\lambda_n z}$, который, может быть, и расходится, единственным образом определяет функцию $F(z)$. Этот факт запишем так:

$$F(z)\sim\sum_{1}^{\infty}A_n e^{-\lambda_n z}. \tag{4}$$

В связи с этим в настоящей статье находятся условия, которым должна удовлетворять функция $F(z)$, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} z\geqslant 0$ и показательного типа в ней, чтобы она определялась рядом вида (4), или, что все равно, являлась бы предельной функцией последовательности (2), сходящейся в некоторой полуплоскости, и указывается способ нахождения коэффициентов $A_\nu$ через функцию $F(z)$.

Для этого нам потребуется одна лемма.

Обозначим через $l$ выпуклый контур, составленный из конечной выпуклой кривой, расположенной справа от мнимой оси, и двух лучей, исходящих из точек мнимой оси и наклоненных к ней соответственно под углами $\alpha$ и $\pi-\alpha$, $0<\alpha<\pi/2$. $P$ и $Q$ — области, ограниченные кривой $l$, причем $P$ не содержит начала координат. Далее легко доказывается лемма.

Лемма. *Пусть функция $\gamma(t)$ регулярна на кривой $l$ и в некоторой полосе, содержащей внутри себя кривую $l$, растет не быстрее, чем функция показательного типа, и для $z>0$ и достаточно больших имеет место тождество:*

$$\int_l \gamma(t)\, e^{zt}\, dt \equiv 0. \tag{5}$$

*Тогда $\gamma(t)$ будет функцией, регулярной в области $Q$, и растет там не быстрее функции показательного типа.*

Теперь рассмотрим одно функциональное уравнение. Обозначим через $\{f(\zeta)\}=M_f$ совокупность функций, регулярных на кривой $l$ и в области $P$. Кроме того, будем предполагать, что каждая функция $f(\zeta)$ в некоторой полосе, содержащей внутри себя кривую $l$, растет не быстрее функции показательного типа. Пусть $G(\zeta)$ — целая функция показательного типа.

Выясним свойства решений уравнения

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l f(\zeta)\, G(\zeta)\, e^{z\zeta}\, d\zeta = 0. \tag{6}$$

Основное свойство решений этого уравнения дает теорема 1.

Теорема 1. *Всякое решение уравнения* (6) *из множества $M_f$ есть функция мероморфная.*

Доказательство. Пусть $f(\zeta)\in M_f$ есть решение уравнения (6). Тогда, по лемме, функция $f(\zeta)\,G(\zeta)$ регулярна в области $Q$ и на кривой $l$. В то же время она регулярна и в области $P$. Поэтому эта функция целая. Из этого и следует утверждение теоремы.

Заметим, что полюсами функции $f(\zeta)$ могут быть только нули функции $G(\zeta)$.

Если $f(\zeta)$ растет в $P$ не выше функции показательного типа, то и функция $f(\zeta)\,G(\zeta)$ будет целой функцией показательного типа.

Введем определение. Пусть $F(\zeta)$ — функция регулярная и показательного типа в угле $|\arg\zeta|\leqslant\alpha'$, $\alpha'\geqslant\alpha$. Назовем функцию $f(\zeta)$, определенную формулой

$$f(\zeta)=\int_0^\infty F(z)\, e^{-z\zeta}\, dz, \tag{7}$$

ассоциированной с $F(\zeta)$; $f(\zeta)$ будет принадлежать $M_f$. $F(\zeta)$ будет выражаться через $f(\zeta)$ формулой

$$F(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int_l f(z)\, e^{z\zeta} dz. \tag{8}$$

Отметим, что если функция $f(\zeta)$, ассоциированная с $F(\zeta)$, удовлетворяет уравнению (6), то $F(\zeta)$ будет удовлетворять уравнению

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n F^{(n)}(\zeta) = 0, \tag{9}$$

где

$$\sum_{0}^{\infty} B_n \zeta^n = G(\zeta). \tag{10}$$

$G(\zeta)$ обычно называют характеристической функцией уравнения (9).

Таким образом, имеем следствие теоремы 1:

Следствие. Всякое решение уравнения (9) с характеристической функцией (10), регулярное и показательного типа в угле $|\arg \zeta| \leqslant \alpha$, будет иметь ассоциированную функцию мероморфную, для которой полюсами могут быть только нули функции $G(\zeta)$, расположенные в области $Q$.

В частности, из этого следует, что функция

$$\Phi(\zeta) = G(\zeta) \int_{0}^{\infty} F(z) e^{-z\zeta} dz \tag{11}$$

будет целой и показательного типа.

Последнее следствие позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы функция* $F(\zeta)$, *регулярная в полуплоскости* $\operatorname{Re}\zeta \geqslant 0$ *и показательного типа в ней, являлась предельной функцией последовательности* (2), *равномерно сходящейся в любой ограниченной области из некоторой полуплоскости* $\operatorname{Re}\zeta \geqslant \gamma \geqslant 0$, *необходимо и достаточно, чтобы ассоциированная с ней функция* $f(\zeta)$ *была мероморфной с простыми полюсами в точках* $-\lambda_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$

Необходимость указанного условия непосредственно получается из следствия. Действительно, функция $F(\zeta)$, предельная для последовательности (2), будет решением уравнения вида (9) с характеристической функцией

$$G(\zeta) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta^2}{\lambda_n^2}\right). \tag{12}$$

Из этого и следует необходимость указанного условия.

Достаточность условия будет вытекать из представления функции $F(\zeta)$ через ассоциированную формулой

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l} \frac{\Phi(z)}{G(z)} e^{z\zeta} d\zeta, \tag{13}$$

где $\Phi(z)$ определяется равенством (11), а $G(z)$ — (12) и контур $l$ составлен из двух лучей, исходящих из начала и образующих с отрицательной частью действительной оси соответственно углы $\delta$ и $-\delta$, причем $\delta$ — как угодно малое положительное число. Из (13) легко следует, что $F(\zeta)$ будет предельной функцией для последовательности полиномов вида (2), сходящейся в некоторой полуплоскости, а также выражения для коэффициентов $A_n$:

$$A_n = \frac{\Phi(-\lambda_n)}{G'(-\lambda_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Эти коэффициенты $A_n$ будут, таким образом, являться вычетами функции $f(\zeta)$, ассоциированной с $F(\zeta)$, в ее полюсах $-\lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$

Поступило
19 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ф. Леонтьев, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 38 (1951).