Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

Г. И. КАЦ

ХАРАКТЕРЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ УНИМОДУЛЯРНОЙ ГРУППЫ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 27 VI 1951)

В настоящей заметке алгебраическим путем находятся выражения для характеров неприводимых представлений унимодулярной группы.

Обозначим через $D_{p_1\ldots p_n}$ неприводимое представление группы унимодулярных матриц порядка n, вес которого определяется набором целых чисел $p_1\ldots p_n$

$$p_1 \geqslant p_2 \geqslant \cdots \geqslant p_n$$

(в обычных обозначениях, см. ([1])).

Рассмотрим наряду с группой унимодулярных матриц порядка n $\|a_{ik}\|_1^n$ подгруппу унимодулярных матриц порядка $n-1$ $\|a_{ik}\|_2^n$.

Мы будем далее группу унимодулярных матриц $\|a_{ik}\|_1^n$ и подгруппу матриц $\|a_{ik}\|_2^n$ просто называть соответственно группой и подгруппой. Неприводимое относительно всей группы представление $D_{p_1\ldots p_n}$ относительно рассматриваемой подгруппы распадается на неприводимые представления $D_{(p'_1)p'_2\ldots p'_n}$. Через $p'_1\ldots p'_n$ обозначен вес вектора максимального веса данного представления подгруппы относительно всей группы. Набор чисел $p'_2\ldots p'_n$ является весом представления $D_{(p'_1)p'_2\ldots p'_n}$ подгруппы, число же p'_1 характеризует представление $D_{(p'_1)p'_2\ldots p'_n}$ подгруппы как часть представления всей группы, поэтому ниже мы будем называть p'_1 внешней координатой веса, а разность $p'_1-p'_2$ — внешним весом неприводимого представления $D_{(p'_1)p'_2\ldots p'_n}$ подгруппы.

Исходным положением настоящей работы является следующая теорема теории представлений унимодулярной группы, являющаяся очевидным следствием эффективного построения алгебры Ли представлений унимодулярной группы, полученного И. М. Гельфандом и М. Л. Цейтлиным ([2]).

Теорема 1. *Неприводимое представление группы $D_{p_1\ldots p_n}$ относительно подгруппы распадается на неприводимые представления $D_{(p'_1)p'_2\ldots p'_n}$, где $p'_1=p_1-k_{11}-k_{12}-\cdots-k_{1\,n-1}$, $p'_i=p_i+k_{1\,i-1}$, причем числа k_{1i} $(i=1,\ldots,n-1)$ принимают всевозможные целые значения, удовлетворяющие неравенствам $0\leqslant k_{1i}\leqslant p_i-p_{i+1}$.*

Из этой теоремы, используя введенное выше понятие внешнего веса, мы получаем следующую теорему, позволяющую реконструировать представление группы по неприводимым представлениям, на которые оно распадается относительно подгруппы.

Теорема 2. *Пусть среди внешних весов неприводимых представлений подгруппы, на которые распадается данное представление D группы, наибольшим является p и пусть этим внешним весом обладают неприводимые представления подгруппы (входящие в представление D) $D_{(p_1^{(i)})\, p_2^{(i)} \ldots p_n^{(i)}}$. Тогда D содержит неприводимые представления группы $D_{p_1^{(i)} p_2^{(i)} \ldots p_n^{(i)}}$.*

Введем символы δ_i соотношениями

$$\delta_i D_{p_1 \ldots p_i \ldots p_n} = D_{p_1 \ldots p_i + 1 \ldots p_n},$$

причем мы считаем, что $D_{p_1 \ldots p_{i-1} p_i \ldots p_n} = 0$, если $p_{i-1} < p_i$.

С помощью теорем 1 и 2 доказываем справедливость формулы (1), дающей расщепление кронекеровского произведения представлений $D_{p_1 \ldots p_n}$ и $D_{\underbrace{1 \ldots 1}_{k} 0 \ldots 0}$ на неприводимые представления

$$D_{\underbrace{1 \ldots 1}_{k} 0 \ldots 0} \times D_{p_1 \ldots p_n} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \delta_{i_k} \ldots \delta_{i_1} D_{p_1 \ldots p_n}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{1}$$

Формула (1) является основной в настоящей работе. Будучи переформулированной для характеров, она дает возможность получить для них явные выражения.

Доказательство формулы (1) проводится следующим образом. Используя известную формулу для размерности $N(p_1 \ldots p_n)$ неприводимых представлений унимодулярной группы (см. [1])

$$N(p_1 \ldots p_n) = \frac{\prod\limits_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n} (l_\nu - l_\mu)}{\prod\limits_{1 \leqslant \nu < \mu \leqslant n} (\mu - \nu)}, \quad l_\mu = p_\mu + n - \mu, \tag{2}$$

мы можем установить совпадение размерностей представлений, стоящих в левой и правой частях (1). Теперь остается лишь показать, что представление $D_{\underbrace{1 \ldots 1}_{k} 0 \ldots 0} \times D_{p_1 \ldots p_n}$ содержит представление $\sum\limits_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \delta_{i_k} \ldots \delta_{i_1} D_{p_1 \ldots p_n}$.

Для доказательства предположим справедливость (1) для унимодулярной группы матриц $n-1$-го порядка. Согласно теореме 1, мы можем расщепить каждый из сомножителей, стоящих в левой части (1), на неприводимые представления подгруппы

$$D_{\underbrace{1 \ldots 1}_{k} 0 \ldots 0} \times D_{p_1 \ldots p_n} = \Big(D_{(1)\underbrace{1 \ldots 1}_{k} 0 \ldots 0} + D_{\underbrace{(0)\, 1 \ldots 1}_{k+1} 0 \ldots 0}\Big) \sum D_{(p_1')\, p_2' \ldots p_n'}.$$

Полученные таким образом кронекеровские произведения представлений подгруппы могут быть расщеплены с помощью формулы (1), справедливость которой предположена для унимодулярной группы матриц $n-1$-го порядка.

Итак, нам известны неприводимые представления относительно подгруппы, на которые распадается левая часть (1). Теорема 2 дает теперь возможность установить, что в представление $D_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0\ldots0} D_{p_1\ldots p_n}$ входит представление $\sum\limits_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} \delta_{i_k}\ldots\delta_{i_1} D_{p_1\ldots p_n}$. Таким образом, доказана справедливость формулы (1) для унимодулярной группы матриц n-го порядка. Отметим, что использованная нами при доказательстве формула (2) может быть получена как простое следствие теоремы 1. Обычно формулу (2) получают, используя аппарат интегрирования на группе.

Перейдем теперь к вычислению характеров. Пусть $\chi(p_1\ldots p_n)$ — характер неприводимого представления $D_{p_1\ldots p_n}$. Для характеров представлений $D_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0\ldots0}$ введем специальное обозначение x_k. Очевидно, что $x_n=\chi(1\ldots1)=\chi(0\ldots0)=1$. Так как характеры суммы и кронекеровского произведения представлений равны соответственно сумме и произведению характеров этих представлений, то формула (1) может быть перенесена на характеры:

$$x_k\chi(p_1\ldots p_n)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\delta_{i_k}\ldots\delta_{i_1}\chi(p_1\ldots p_n), \tag{3}$$

где

$$\delta_i\chi(p_1\ldots p_n)=\chi(p_1\ldots p_i+1\ldots p_n);\ \chi(p_1\ldots p_i\ p_i+1\ldots p_n)=0.$$

Введем вместо p_i новые переменные $l_i=p_i+n-1$. Характеры $\chi(l_1\ldots l_n)$ как функции от $l_1\ldots l_n$ определены лишь для целых значений l_i, удовлетворяющих неравенству $l_1>l_2>\cdots>l_n$.

Доопределим функцию $\chi(l_1\ldots l_n)$ для любых целых значений l_i так, чтобы она оказалась антисимметрической по всем своим аргументам. Нетрудно убедиться, что таким образом доопределенная функция $\chi(l_1\ldots l_n)$ удовлетворяет соотношениям

$$x_k\chi(l_1\ldots l_n)=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\delta_{i_k}\ldots\delta_{i_1}\chi(l_1\ldots l_n). \tag{4}$$

Положим

$$\varphi(z)=z^n-x_1z^{n-1}+x_2z^{n-2}+\cdots+x_n(-1)^n. \tag{5}$$

Правые части (4) являются элементарными симметрическими функциями от δ_i. Поэтому (δ_i, очевидно, коммутирует)

$$\varphi(\delta_i)\chi(l_1\ldots l_n)=0.$$

В более подробной записи это равенство показывает, что $\chi(l_1\ldots l_n)$ удовлетворяет разностным уравнениям

$$\chi(l_1\ldots l_i+n\ldots l_n)-x_1\chi(l_1\ldots l_i+n-1\ldots l_n)+$$
$$+x_2\chi(l_1\ldots l_i+n-2\ldots)+\cdots+(-1)^n\chi(l_1\ldots l_n)=0.$$

Обозначим через $p_l^{(i)}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ полную линейно независимую систему решений уравнения

$$f_{l+n}-x_1f_{l+n-1}+x_2f_{l+n-2}+\ldots+(-1)^nf_l=0. \tag{6}$$

$\chi(l_1\ldots l_n)$ является тогда полиномом от $p_{l_i}^{(i)}$ линейным относительно каждого переменного. Из антисимметрии функции $\chi(l_1\ldots l_n)$ следует, что она с точностью до постоянного множителя равна определителю $|p^{(i)}_{l_j}|$

$$\chi(l_1 \ldots l_n) = C\,|p^{(i)}_{l_j}|. \tag{7}$$

Постоянный множитель C в (7) должен быть определен из условия $\chi(n-1,\ n-2,\ldots 0) = 1$.

Итак,

$$\chi(l_1 \ldots l_n) = \frac{|p^{(i)}_{l_j}|}{|p^{(i)}_{n-j}|}. \tag{8}$$

Выбирая по-разному системы $p^{(i)}_l$ решений уравнения (6), мы приходим к различным явным выражениям для характеров.

Обозначим через $p_l = p_l(x_1 \ldots x_{n-1})$, $l \geqslant 0$, полиномы, являющиеся коэффициентами разложения в ряд по степеням z функции $\dfrac{1}{z^n\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$; положим, кроме того, $p_{-1} = p_{-2} = \cdots = p_{-(n-1)} = 0$. p_l при $l > n-1$ является решением уравнения (6) с начальными условиями $p_0 = 1$, $p_{-1} = \cdots = p_{-(n-1)} = 0$.

Полиномы $p_l, p_{l-1}, \ldots, p_{l-(n-1)}$ образуют полную систему решений уравнения (6). Используя эту систему в формуле (8), мы получаем:

$$\chi(l_1 \ldots l_n) = |p_{l_j-(n-i)}|. \tag{9}$$

Формула (9) определяет характеры как полиномы от характеров $x_1 \ldots x_{n-1}$ представлений $D_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0\ldots0}$. Формула (9) приведена в монографии Вейля ([3]).

Как известно, представление $D_{10\ldots0}$ совпадает с самой группой, а $D_{\underbrace{1\ldots1}_{k}0\ldots0}$ является антисимметризованным произведением k представлений $D_{10\ldots0}$. Поэтому характеры x_k являются элементарными симметрическими функциями корней характеристического полинома унимодулярной матрицы (см. ([1], [3])). В частности, полином $\varphi(z)$ (5) является характеристическим полиномом.

Пусть $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ $(\varepsilon_i \neq \varepsilon_j)$ — корни характеристического полинома (5). $\varepsilon_1^l, \ldots, \varepsilon_n^l$ образуют полную систему решений уравнения (6).

Используя эту систему в формуле (8), мы приходим к обычной формуле, выражающей характеры представлений унимодулярной группы через собственные числа унимодулярной матрицы (см. ([1], [3])).

$$\chi(l_1 \ldots l_n) = \frac{|\varepsilon_i^{l_j}|}{|\varepsilon_i^{n-j}|}.$$

Житомирский пединститут

Поступило
27 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Г. Чеботарев, Теория группы Ли, 1940. [2] И. М. Гельфанд и М. Л. Цейтлин, ДАН, 71, № 5 (1950). [3] Г. Вейль, Классические группы, инварианты и представления, 1947.