Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 1

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ГЕРОНИМУС

ОБ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМАХ В. А. СТЕКЛОВА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 7 I 1952)

1. Пусть полиномы $\{\hat{\varphi}_n(x)\}$ ортогональны и нормальны на отрезке $[-1, +1]$ относительно веса $w(x) \geqslant 0$, т. е. удовлетворяют соотношениям

$$\int_{-1}^{1} w(x)\,\hat{\varphi}_n(x)\,\hat{\varphi}_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m; \end{cases} \quad (n,\ m = 0,\ 1, \ldots) \tag{1}$$

В своем мемуаре [1], посвященном столетию со дня рождения великого русского ученого П. Л. Чебышева, основоположника общей теории ортогональных полиномов, В. А. Стеклов поставил вопрос: *каким условиям должен удовлетворять вес $w(x)$ для того, чтобы вся ортогональная система $\{\hat{\varphi}_n(x)\}$ была ограничена на всем отрезке $[-1, +1]$ или его части*, т. е.

$$|\varphi_n(x)| \leqslant M, \quad (n = 0,\ 1, \ldots), \qquad -1 \leqslant a \leqslant x \leqslant b \leqslant 1. \tag{2}$$

Такие ортогональные полиномы, которые мы позволим себе назвать *ортогональными полиномами В. А. Стеклова*, являются естественным обобщением полиномов Чебышева и обладают рядом интересных свойств — например, В. А. Стеклов показал, что в каждой точке $x \in [-1, +1]$, в которой выполняется условие (2), ряд Фурье—Чебышева любой функции $F(x)$, удовлетворяющей условию Липшица

$$|F(x') - F(x'')| \leqslant \lambda\, |x' - x''|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{3}$$

сходится к значению $F(x)$. Мы выведем достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $w(x)$, для того, чтобы (2) выполнялось на всем отрезке $[-1, +1]$.

2. Рассмотрим полиномы $\{\hat{P}_n(z)\}$, ортогональные и нормальные на единичной окружности $|z| = 1$ относительно веса $p(\theta)$, т. е. удовлетворяющие соотношению

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} p(\theta)\,\hat{P}_n(e^{i\theta})\,\overline{\hat{P}_m(e^{i\theta})}\,d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m, \end{cases} \quad (n,\ m = 0,\ 1, \ldots) \tag{4}$$

Рассмотрим пространство $L_2(0, 2\pi)$ периодических функций $f(\theta)$ с обычным определением нормы

$$\|f\| = \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2\, d\theta\right\}^{1/2} < \infty$$

и введем интегральный модуль непрерывности

$$\omega_2(f;\ \delta) = \sup_{0<h\leqslant\delta} \|f(\theta+h) - f(\theta)\|; \tag{5}$$

если $\omega_2(f;\ \delta) \leqslant M\delta^\alpha$, $0<\alpha\leqslant 1$, то будем говорить, что функция $f(\theta)$ принадлежит классу $\mathrm{Lip}(\alpha,\ 2)$.

Теорема 1. *Если вес* $p(\theta) \in \mathrm{Lip}(\alpha,\ 2)$, *где* $1/2 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *и если почти всюду в* $[0,\ 2\pi]$ *справедливо неравенство*

$$0 < m_1 \leqslant p(\theta) \leqslant m_2, \tag{6}$$

то соответствующие ортогональные нормальные полиномы $\{\hat{P}_n(z)\}$ *равномерно ограничены в замкнутой области* $|z| \leqslant 1$

$$|\hat{P}_n(z)| \leqslant A \quad (n=0,\ 1, \ldots), \quad |z| \leqslant 1. \tag{7}$$

3. Наметим ход доказательства. Из условий (6) вытекает возможность построения аналитической функции

$$\pi(z) = \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \lg p(\theta)\, d\theta\right\}, \quad |z|<1, \tag{8}$$

регулярной и не равной нулю в области $|z|<1$; почти всюду в $[0,\ 2\pi]$ она имеет радиальные граничные значения, причем почти всюду в $[0,\ 2\pi]$ имеем

$$p(\theta) = \frac{1}{|\pi(e^{i\theta})|^2};$$

$$\pi(e^{i\theta}) = \lim_{r\to 1-0} \pi(re^{i\theta}) = \frac{1}{\sqrt{p(\theta)}} \exp\left\{-\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2} \lg p(\theta)\, d\theta\right\}; \tag{9}$$

интеграл понимается в смысле главного значения Коши. Легко видеть, что условия $p(\theta) \in \mathrm{Lip}(\alpha,\ 2)$ и (6) влекут за собою условие $\lg p(\theta) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2)$; следовательно, для функции $\arg \pi(e^{i\theta})$, сопряженной по отношению функции $\lg \frac{1}{\sqrt{p(\theta)}}$, также имеем $\arg \pi(e^{i\theta}) \in \mathrm{Lip}(\alpha,\ 2)$; отсюда вытекает, что $\pi(e^{i\theta}) \in \mathrm{Lip}(\alpha,\ 2)$. Пользуясь этим, мы делаем заключение о существовании полинома $G_n(z)$ степени n, для которого

$$\|\pi(e^{i\theta})\,\pi(0) - G_n(e^{i\theta})\| \leqslant \frac{B}{n^\alpha}. \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что формальное разложение функции $\pi(z)\,\pi(0)$ в ряд Фурье — Чебышева таково ([2]):

$$\pi(z)\,\pi(0) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \hat{P}_k(z)\,\overline{\hat{P}_k(0)}, \tag{11}$$

причем ряд сходится в области $|z|<1$ равномерно для $|z|\leqslant r<1$; в то же время для полинома $\hat{P}_n^*(z)=z^n\,\overline{\hat{P}}_n\left(\frac{1}{z}\right)$ имеем (2)

$$\hat{P}_n^*(z)\,\hat{P}_n^*(0)=\sum_{k=0}^{n}\hat{P}_k(z)\,\overline{\hat{P}_k(0)}; \tag{11'}$$

таким образом легко находим, пользуясь (10), (6),

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\pi(e^{i\theta})\,\pi(0)-\hat{P}_n^*(z)\,\hat{P}_n^*(0)|^2\,p(\theta)\,d\theta\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\pi(e^{i\theta})\,\pi(0)-G_n(e^{i\theta})|^2\,p(\theta)\,d\theta\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{m_2}\,\|\pi(e^{i\theta})\,\pi(0)-G_n(e^{i\theta})\|\leqslant\frac{B\sqrt{m_2}}{n^{\alpha}}. \tag{12}$$

Представляя функцию

$$\{\pi(z)\,\pi(0)-\hat{P}_n^*(z)\,\hat{P}_n^*(0)\}^2$$

интегралом Пуассона

$$\{\pi(re^{i\varphi})\,\pi(0)-\hat{P}_n^*(re^{i\varphi})\,\hat{P}_n^*(0)\}^2=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\pi(e^{i\theta})\,\pi(0)-\hat{P}_n^*(e^{i\theta})\,\hat{P}_n^*(0)\}^2\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}\,d\theta,\quad r<1,$$

находим по (12), (6)

$$|\pi(re^{i\theta})\,\pi(0)-\hat{P}_n^*(re^{i\theta})\,\hat{P}_n^*(0)|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\frac{1+r}{1-r}}\,\|\pi(e^{i\theta})\,\pi(0)-\hat{P}_n^*(e^{i\theta})\,\hat{P}_n^*(0)\|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m_1}\sqrt{1-r}}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\pi(e^{i\theta})\,\pi(0)-\hat{P}_n^*(e^{i\theta})\,\hat{P}_n^*(0)|^2\,p(\theta)\,d\theta\right\}^{1/2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{B\sqrt{2m_2}}{\sqrt{m_1}}\,\frac{1}{\sqrt{1-r}\,n^{\alpha}}; \tag{13}$$

полагая $1-r=1/2n$, $\alpha\geqslant 1/2$, получим отсюда

$$|\hat{P}_n^*(re^{i\varphi})\,\hat{P}_n^*(0)|\leqslant|\pi(re^{i\varphi})\,\pi(0)|+\frac{2B\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}}\,\frac{1}{n^{\alpha-1/2}}=|\pi(re^{i\varphi})\,\pi(0)|+C, \tag{14}$$

где C — ограниченная величина; так как по (6), (9) функция $\pi(e^{i\theta})$ удовлетворяет почти всюду в $[0, 2\pi]$ неравенству $|\pi(e^{i\theta})|\leqslant 1/\sqrt{m_1}$, то во всей области $|z|<1$ имеем

$$|\pi(re^{i\varphi})|,\ |\pi(0)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{m_1}},\quad r<1. \tag{15}$$

Пусть, наконец, в замкнутой области $|z|\leqslant 1$ имеем

$$|\hat{P}_n^*(z)|\leqslant M_n,\quad |\hat{P}_n^*(e^{i\theta_0})|=M_n;$$

воспроизводя рассуждения Д. Джексона, легко показать, что при $r = 1 - \frac{1}{2n}$ имеем

$$| \hat{P}_n^* (re^{i\theta_0}) | \geqslant \frac{M_n}{2} . \tag{16}$$

Нетрудно показать справедливость неравенства

$$\hat{P}_n^* (0) > \frac{1}{\sqrt{h_0}}, \quad h_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta)\, d\theta; \tag{17}$$

из (14), (15), (16), (17) находим окончательно

$$M_n \leqslant 2 \sqrt{h_0} \left(\frac{1}{m_1} + C \right) = N, \tag{18}$$

где N не зависит ни от n, ни от r.

4. Вернемся к ортогональным полиномам $\{\hat{\varphi}_n(x)\}$, соответствующим весу $w(x)$ и отрезку $[-1, +1]$; они связаны с полиномами $\{\hat{P}_k(z)\}$, ортогональными на единичной окружности относительно веса

$$p(\theta) = w(\cos\theta) \, |\sin\theta|, \tag{19}$$

известной формулой

$$\hat{\varphi}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \{1 + \hat{P}_{2n}(0) / \hat{P}_{2n}^*(0)\}}} \frac{\hat{P}_{2n}^*(z) + \hat{P}_{2n}(z)}{z^n}, \quad z = x + \sqrt{x^2 - 1}; \tag{20}$$

мы имеем

$$\lim_{n \to \infty} \hat{P}_{2n}(0) = 0, \quad \lim_{n \to \infty} \hat{P}_{2n}^*(0) = \pi(0), \quad \left| \frac{\hat{P}_{2n}(0)}{\hat{P}_{2n}^*(0)} \right| \leqslant \varepsilon, \quad n \geqslant n_0; \tag{21}$$

полагая $x \in [-1, +1]$, т. е. $|z| = 1$, и пользуясь (18), имеем при достаточно больших значениях n

$$|\hat{\varphi}_n(x)| \leqslant \frac{2N}{\sqrt{2\pi(1-\varepsilon)}} = N_1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{22}$$

где N_1 не зависит ни от n, ни от x.

Таким образом, справедлива теорема:

Теорема 2. *Для того чтобы полиномы $\{\hat{\varphi}_n(x)\}$, ортогональные на отрезке $[-1, +1]$ относительно веса $w(x)$, были ортогональными полиномами В. А. Стеклова, достаточно, чтобы функция*

$$p(\theta) = w(\cos\theta) \, |\sin\theta|$$

удовлетворяла условиям теоремы 1.

Поступило
3 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Стеклов, Изв. Российск. Академии наук, 15, 281 (1921). [2] Я. Л. Геронимус, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, сер. 4, 19, 35 (1938).