Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 3

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. Н. ДЕРЮГИН

ПРИВЕДЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ О ВИХРЕВЫХ ТОКАХ В ДИСКЕ К КВАДРАТУРАМ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 28 XI 1951)

1. На рис. 1 показан выполненный из немагнитного материала с удельной проводимостью γ диск с радиусом R и толщиной b, вращающийся с угловой скоростью ω относительно пронизывающего его магнитного поля B, которое параллельно оси диска z. Такое устройство применяется в электроизмерительных приборах, а также в качестве успокоителя. Ниже выводятся общие выражения в виде квадратур для вычисления вихревых токов в диске и тормозящего момента M, действующего со стороны магнитного поля на диск.

В качестве основной системы координат введем полярную систему с началом в центре диска, неподвижную относительно магнитного поля. Через r и φ будем обозначать координаты общей точки диска P, а через a и α — координаты точек A, в которых расположены вихри поля. Примем вначале, что $R=1$. Реакцией диска будем пренебрегать.

2. При вращении диска в нем возникает вихревое электрическое поле $\mathbf{E}$, неподвижное относительно магнитного потока и вращающееся относительно диска. Вихрь этого поля имеет единственную проекцию

$$\mathrm{rot}_z\,\mathbf{E} = \omega\frac{\partial B}{\partial\alpha}, \tag{1}$$

где $B=B(a,\alpha)$ — индукция магнитного поля, заданная как функция координат, а в контуре L, ограничивающем в плоскости диска площадку S, действует эдс

$$\mathscr{E} = \omega\int\limits_S \frac{\partial B}{\partial\alpha}\,dS. \tag{2}$$

В контуре, ограничивающем элементарную площадку dS, будет действовать эдс

$$d\mathscr{E} = \omega\frac{\partial B}{\partial\alpha}\,dS. \tag{3}$$

Практически часто встречаются случаи, когда можно считать, что однородное магнитное поле пронизывает некоторую площадку диска F и равно нулю за ее пределами. Тогда вихри электрического поля возникают только на ограничивающем эту площадку контуре L, который мы будем называть линией вихрей, ибо только здесь $\partial B/\partial\alpha\neq 0$. Так как на этом контуре магнитная индукция изменяется скачком, то значения $\partial B/\partial\alpha$ и $\mathrm{rot}_z\,\mathbf{E}$ обращаются здесь в бесконечность, и формула 3) для вычисления эдс требует дальнейшего преобразования. Для этого проведем контур L так, чтобы он охватывал некоторую дугу A_1AA_2 линии вихрей (рис. 2), а интеграл (2) преобразуем к виду $\mathscr{E} = \omega \int_S d_\alpha Br\,dr$.

Так как приращение $d_\alpha B$ в пределах области интегрирования отлично от нуля лишь на дуге A_1AA_2, где $d_\alpha B = B$*, то поверхностный интеграл вырождается в линейный интеграл $\mathscr{E} = \omega B \int_{A_1AA_2} r\,dr$ по дуге A_1AA_2, откуда

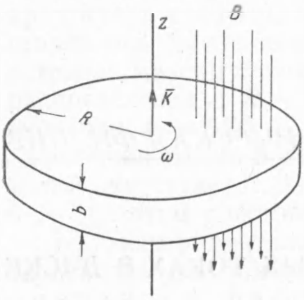

Рис. 1

$$\mathscr{E} = \omega B \frac{a_2^2 - a_1^2}{2}, \tag{4}$$

где a_1 и a_2 суть расстояния от центра диска до точек A_1 и A_2, в которых контур L пересекает линию вихрей. В контуре, охватывающем элемент линии вихрей dl, прилегающий к точке A, будет действовать эдс

$$d\mathscr{E} = \omega Ba\,da, \tag{5}$$

где $da = dl \cos\beta$ (см. рис. 2).

Таким образом, эдс и вихри можно считать найденными и перейти к вычислению электрического поля по вихрям и эдс.

3. Вычислим сначала поле точечного вихря с циркуляцией $\mathscr{E}$, расположенного в точке A на расстоянии a от центра диска O, которое, очевидно, должно удовлетворять уравнениям:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \tag{6}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \text{ всюду, кроме точки } A; \tag{7}$$

$$\oint_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = \mathscr{E},$$

если L охватывает точку A; (8)

$\mathbf{E}_n = 0$ на окружности диска. (9)

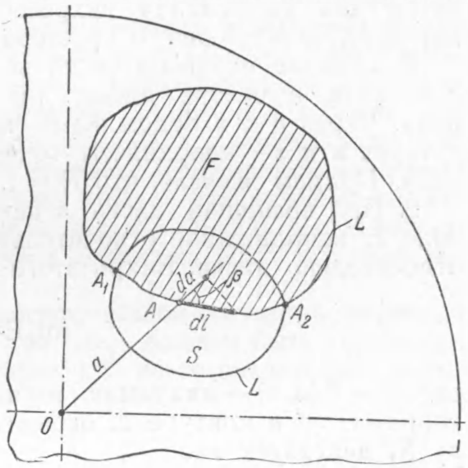

Рис. 2

Плоско-параллельное поле, удовлетворяющее (6) и (7), с помощью соотношений $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} u$ и $\mathbf{E} = \operatorname{rot} \mathbf{k}v$ может быть описано некоторой аналитической функцией комплексного переменного — комплексным потенциалом $w(\dot{z}) = v + ju$, где v — функция потока, а u — действительный потенциал. При этом граничное условие (9) может быть записано в виде

$$v = \text{const на окружности диска.} \tag{10}$$

Уравнениям (8) и (10) можно удовлетворить, взяв в качестве комплексного потенциала функцию $w = c \ln \frac{\dot{z} - \dot{z}_0}{\dot{z} + \dot{z}_0}$, для которой $v = c \ln \frac{\rho''}{\rho'}$, где ρ'' и ρ' суть расстояния текущей точки P на плоскости $\dot{z}$ от точек A'' и A', лежащих на действительной оси по обе стороны от нуля на

* Знак $d_\alpha B$ следует учитывать при определении знака $\mathscr{E}$.

расстоянии z_0 от последнего. Линии $v = \text{const}$ являются окружностями с центрами на действительной оси. Условию (8) удовлетворим, положив $c = \mathcal{E}/2\pi$, а условию (10) — совместив точку A' с точкой A и расположив точку A'' на продолжении отрезка OA на расстоянии $d = 1/a$ от центра диска.

Переходя к полярным координатам, получим, что

$$v = \mathcal{E} v_0 (a, \alpha, r, \varphi), \tag{11}$$

где

$$v_0 = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1}{a^2} \frac{1 - 2ar\cos(\varphi - \alpha) + a^2 r^2}{a^2 - 2ar\cos(\varphi - \alpha) + r^2} \tag{12}$$

есть функции потока для единичного ($\mathcal{E} = 1$) точечного вихря.

4. Применив принцип наложения и теорему Стокса, получим, что при любом распределении вихрей $\text{rot}_z \mathbf{E} = f(a, \alpha)$ функция потока для диска будет

$$v(r, \varphi) = \int\limits_{S_0} f(a, \alpha)\, v_0 (a, \alpha, r, \varphi)\, dS, \tag{13}$$

где S_0 — площадь круга единичного радиуса. Если вихри возникают в результате вращения диска в магнитном поле, то, согласно (1) или (3),

$$v(r, \varphi) = \omega \int\limits_{S_0} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v_0 (a, \alpha, r, \varphi)\, dS. \tag{14}$$

Если магнитное поле однородно в пределах площадки F, то согласно (5)

$$v(r, \varphi) = \omega B \oint\limits_{L} a v_0 (a, \alpha, r, \varphi)\, dS, \tag{15}$$

где переменные a и α связаны соотношением $a = a(\alpha)$, которое является уравнением линии вихрей L.

5. Через найденную функцию потока можно выразить интересующие нас электрические величины и момент. Линии $v(r, \varphi) = \text{const}$ являются линиями электрического тока в диске и электрическими силовыми линиями. Вектор $\mathbf{E}$ и вектор плотности тока $\vec{\delta}$ выражаются как

$$\mathbf{E} = \text{rot}\, \mathbf{k} v(r, \varphi), \quad \vec{\delta} = \gamma\, \text{rot}\, \mathbf{k} v(r, \varphi). \tag{16}$$

Ток, протекающий в толще диска между точками $P_2(r_2, \varphi_2)$ и $P_1(r_1, \varphi_1)$, будет

$$I_{12} = b\gamma \left[v(r_2, \varphi_2) - v(r_1, \varphi_1) \right]. \tag{17}$$

Если за начало отсчета тока принять точку P_0, в которой $v(r, \varphi) = 0$, то ток между любой точкой $P(r, \varphi)$ и начальной точкой P_0 будет

$$I = b\gamma v(r, \varphi). \tag{18}$$

Эту величину можно назвать просто током в точке $P(r, \varphi)$.

Мощность, рассеиваемая в диске на тепло, будет

$$W = b\gamma \int\limits_{S_0} \text{rot}^2 \mathbf{k} v(r, \varphi)\, dS. \tag{19}$$

Наконец, момент, тормозящий вращение диска, может быть определен из энергетических соображений как $M = W/\omega$, откуда для случая однородного магнитного поля получаем

$$M = b\gamma\omega B^2 K, \tag{20}$$

где

$$K = \int\limits_{S_0} \left[\operatorname{rot} \oint\limits_L a v_0 (a, \alpha, r, \varphi)\, da\mathbf{k}\right]^2 dS \tag{21}$$

— коэффициент, зависящий от формы магнитного потока и его расположения относительно диска.

6. Рассматривая диск единичного радиуса, мы не ограничили общности задачи. Если радиус диска R, то во все выведенные формулы в качестве линейных размеров следует подставлять отношения соответствующих величин к радиусу, а полученные в результате электрические величины и момент следует умножить на коэффициенты подобия, приведенные в табл. 1, которые нетрудно получить из формул размерностей.

Таблица 1

Физические величины	E, $\vec{\delta}$	$\mathcal{E}$	I	W, M
Коэффициенты подобия	R	R^2	R^3	R^5

7. Для конкретного вычисления приведенных квадратур должно быть задано распределение магнитного поля $B = B(a, \alpha)$ либо, в случае однородного магнитного поля, уравнение $a = a(\alpha)$ кривой L, ограничивающей площадку диска, пронизанную магнитным полем.

Поступило
27 X 1951