Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 5

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

А. В. ГАПОНОВ

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЛЕКТОРНОЙ МАШИНЫ

(Представлено академиком А. А. Андроновым 21 XI 1951)

В общей динамической теории электрических машин, которая одновременно представляет собой, с одной стороны, главу теоретической электротехники, а с другой стороны,— своеобразную главу аналитической механики, существенную роль играет выбор адэкватной динамической модели коллекторной машины. Несмотря на то, что впервые такая модель, имевшая, правда, лишь один коммутирующий сектор, была указана и разобрана еще Максвеллом (1) и что этому вопросу с тех пор был посвящен ряд работ (2–7), его нельзя считать удовлетворительно решенным.

В настоящей работе предлагается динамическая модель коллекторной машины, достаточно хорошо отражающая ее типичные электрические и механические свойства и в то же время такая, в которой сведены к минимуму вычислительные трудности.

Простейший линейный вариант модели, рассмотренный ниже, оставляет в стороне все явления, связанные с насыщением в железе, но зато ясно показывает динамические свойства электрической машины, связанные с наличием коллектора. Наряду с точными — в пределах сделанных физических предположений — разностными уравнениями движения рассмотрены и приближенные дифференциальные уравнения *. Аналогичные уравнения можно получить и для нелинейного (с учетом насыщения) варианта модели.

1. Рассмотрим динамическую модель коллекторной машины последовательного возбуждения с симметричной обмоткой гладкого ротора (рис. 1). Если пластины коллектора изолированы друг от друга, то число «электрических» степеней свободы зависит от того, сколько коллекторных пластин перекрывают щетки в данный момент: каждый коротко замкнутый (через щетку) виток обмотки описывается своим дифференциальным уравнением. Поэтому всякую коллекторную машину можно рассматривать как электромеханическую систему с переменным (разрывно зависящим от угла поворота ротора φ) числом степеней свободы. Пусть коллектор состоит из N пластин: тогда при повороте на угол $\Delta = 2\pi / N$ конфигурация проводников в системе не меняется, и движение можно представить как последовательность идентичных циклов.

В случае полной симметрии (щетки расположены одна против другой, число пластин четное) и при одинаковых начальных условиях токи в обеих частях *1* и *2* роторной обмотки (включая коротко замкнутые витки) будут равны; поэтому в динамическом отношении коллекторная машина последовательного возбуждения эквивалентна своеоб-

* Точные разностные уравнения модели получаются путем использования уравнения Лагранжа — Максвелла. Модель коллекторной машины, описываемая дифференциальными уравнениями (получающимися из разностных путем усреднения), является примером электромеханической системы, уравнения движения которой — даже в консервативном случае,— вообще говоря, не записываются в форме Лагранжа — Максвелла.

разному (с самовозбуждением) колесу Барлоу (рис. 2). Уравнения движения в принятой идеализации здесь будут такими же, как у более сложной системы (рис. 1), лишь коэффициенты будут иметь несколько иной физический смысл. Дальнейшие рассуждения будем вести применительно к этой упрощенной модели. Допустим, что ширина щетки Δ_1 и зазор ε между двумя коллекторными пластинами таковы, что $\varepsilon < \Delta_1 < 2\Delta - \varepsilon$; тогда каждый цикл распадается на 3 этапа: 1) поворот на угол $\Delta - \Delta_1 + \varepsilon$, в течение которого щетка касается только одной коллекторной пластины (одна «электрическая» степень свободы); 2) поворот на угол $\Delta_1 - \varepsilon$, в течение которого щетка перекрывает 2 пластины (2 «электрические» степени свободы); 3) мгновенный разрыв коротко-замкнутого витка («ударная» коммутация). Для каждого этапа можно писать уравнения в форме Лагранжа — Максвелла; для упрощения выкладок мы сначала предположим, что на систему не действуют сторонние эдс, диссипативные силы и т. д.*.

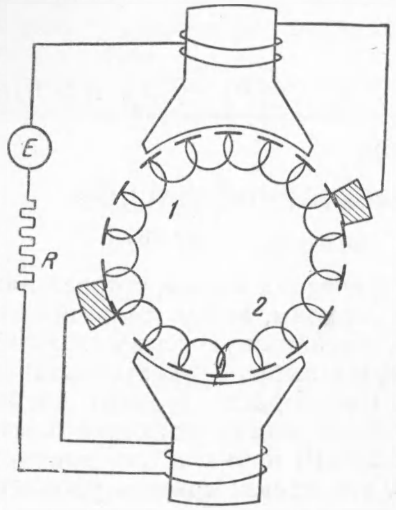

Рис. 1. Схема коллекторной машины последовательного возбуждения

Этап I. Обозначая самоиндукцию контура $OaAA'O$ через $L(\varphi)$ и ток в нем через $\dot q$, получим уравнение движения и его интеграл в виде

$$\frac{d}{dt}[L(\varphi)\dot q] \equiv L\ddot q + \frac{\partial L}{\partial \varphi}\dot q\dot\varphi = 0;$$

$$L^- \dot q^- = L^* \dot q^*, \qquad (1)$$

где L^-, $\dot q^-$ и $L^*, \dot q^*$ — значения соответствующих величин в начале и в конце первого этапа.

Этап II. Система обладает двумя «электрическими» степенями свободы; кроме основного контура $OaAA'O$ появляется коротко-замкнутый виток $OaAbO$ (коэффициент взаимоиндукции с основным контуром $n(\varphi)$, самоиндукция $l(\varphi)$, ток $\dot\varkappa$). Уравнения движения

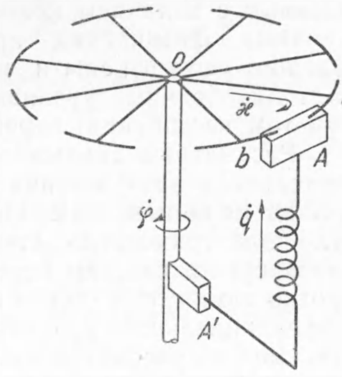

Рис. 2. Колесо Барлоу с самовозбуждением

$$\frac{d}{dt}[L(\varphi)\dot q + n(\varphi)\dot\varkappa] = 0; \qquad \frac{d}{dt}[l(\varphi)\dot\varkappa + n(\varphi)\dot q] = 0. \qquad (2)$$

Начальные значения токов суть $\dot q = \dot q^*$, $\dot\varkappa = 0$; конечные значения токов и коэффициентов индукции обозначим через $\dot q^+$, $\dot x^+$, $L^+, \ldots$ и т. д Интегрируя (2), получим

$$L^+\dot q^+ + n^+\dot\varkappa^+ = L^* \dot q^*, \qquad l^+\dot\varkappa^+ + n^+\dot q^+ = n^*\dot q^*. \qquad (2')$$

Этап III. Процесс коммутации заключается в том, что благодаря изменению от 0 до ∞ сопротивления r между щеткой и уходящей

* Ниже приводится вывод уравнения для «электрической» координаты q. Уравнение для механической координаты φ получается совершенно аналогично (в частности, можно считать движение ротора заданным).

из-под нее пластиной коллектора ток $\varkappa$ меняется от $\varkappa^+$ до $\varkappa^{**}$, компенсируя ток в спице Oa. Если после коммутации $\dot{q} = \dot{q}^{**}$, то, очевидно, $\dot{\varkappa}^{**} = \dot{q}^{**}$. Уравнения движения будут

$$\frac{d}{dt}[L\dot{q} + n\dot{\varkappa}] + (\dot{q} - \dot{\varkappa})\, r = 0; \quad \frac{d}{dt}[l\dot{\varkappa} + n\dot{q}] - (\dot{q} - \dot{\varkappa})\, r = 0. \tag{3}$$

Поскольку, по предположению, коммутация совершается мгновенно из (3) сразу следует, что сохраняется полный магнитный поток системы $(L^+ + n^+)\,\dot{q} + (l^+ + n^+)\,\dot{\varkappa} = \mathrm{const}$. Подставляя $\dot{\varkappa}^{**} = \dot{q}^{**}$ и учитывая, что $L^- = L^+ + 2n^+ + l^+$, получим *

$$L^-\dot{q}^{**} = (L^+ + n^+)\,\dot{q}^+ + (l^+ + n^+)\,\dot{\varkappa}^+. \tag{4}$$

Применяя последовательно преобразования I, II и III этапов, приходим к связи между начальным и конечным значениями тока во внешней цепи для k-го цикла: $L^*\dot{q}_{k+1} = (L^* + n^*)\,\dot{q}_k$, которую можно трактовать как уравнение движения в конечных разностях для тока во внешней цепи простейшего линейного варианта модели коллекторной машины.

Аналогичные разностные уравнения можно написать и для более сложных цепей (для коллекторных машин с несколькими обмотками; цепей, состоящих из нескольких машин и т. д.).

2. Уравнения в конечных разностях пригодны для описания движения коллекторной машины при любом числе коммутирующих элементов N. В реальных машинах N очень велико; поэтому при решении задач, не требующих особой точности, можно, как это обычно делается, пренебречь в уравнениях движения членами порядка $\Delta = 2\pi/N$ по сравнению с единицей. Полученные таким образом уравнения мы будем называть «уравнениями первого приближения».

Учитывая, что в реальных машинах (рис. 1) $l \sim L\Delta^2$ и $n \sim L\Delta$, вместо точного уравнения (5) получим приближенно

$$L\,\frac{\dot{q}_{k+1} - \dot{q}_k}{\tau_k} + \frac{1}{2}\,L'\dot{\varphi}_k\dot{q}_k = 0, \tag{5}$$

так как $n^+ \approx n^* \approx -\frac{1}{2}(L^+ - L^-) \approx -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=\alpha}\Delta$ и так как $\tau_k\varphi_k \approx \Delta$. Здесь $L = L(\alpha)$ и $L' = (\partial L/\partial\varphi)_{\varphi=\alpha}$ (угол α — постоянный и определяется положением щеток).

Заменяя $\dot{\varphi}_k \approx \dot{\bar{\varphi}}(t)$, $\dot{q}_k \approx \dot{\bar{q}}(t)$, $\dot{q}_{k+1} - \dot{q}_k \approx \ddot{\bar{q}}(t)\,\tau_k$, можно перейти от разностного уравнения к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$L\ddot{\bar{q}} + \frac{1}{2}\,L'\dot{\bar{\varphi}}\,\dot{\bar{q}} = 0. \tag{6}$$

Соответствующее уравнение для механической координаты имеет вид:

$$T\ddot{\bar{\varphi}} - \frac{1}{2}\,L'\dot{\bar{q}}^2 = 0. \tag{7}$$

---

* Коммутация — процесс, вообще говоря, неконсервативный; только при «безискровой коммутации» ($\dot{\varkappa}^+ = \dot{q}^+$) система не теряет энергии. Безискровой коммутации можно, как известно, добиться применением добавочных полюсов или смещением щеток с геометрической нейтрали: как следует из преобразования (2), она имеет место при $(L^+ + n^+)\, n^* = (l^+ + n^+)\, L^*$. Синж [7] в заметке, посвященной критике динамической модели коллекторной машины, предложенной Инграмом [5] и Кроном [6], рассмотрел модель с добавочными полюсами.

Дифференциальные уравнения первого приближения (6) и (7)* (не записывающиеся в форме Лагранжа) определяют «гладкие» функции $\dot{\bar{q}}(t)$ и $\dot{\bar{\varphi}}(t)$; ординаты кривой $\dot{\bar{q}}(t)$ отличаются как от истинного тока $\dot{q}$, так и от его среднего значения на величину порядка $\Delta \ll 1$.

При наличии омического сопротивления R, вязкого трения f, заданной сторонней эдс $E(t)$ и заданного механического момента $K(t)$ уравнения каждого этапа интегрируются, вообще говоря, только приближенно. Уравнения первого приближения имеют в этом случае вид

$$L\ddot{\bar{q}} + \frac{1}{2} L'\dot{\bar{\varphi}}\,\dot{\bar{q}} + R\dot{\bar{q}} = E(t); \quad J\ddot{\bar{\varphi}} - \frac{1}{2} L'\dot{\bar{q}}^2 + f\dot{\bar{\varphi}} = K(t). \tag{8}$$

В литературе, посвященной общей теории коллекторных электрических машин, обычно пользуются уравнениями первого приближения (см., например, ([3-7])). Однако, насколько нам известно, удовлетворительного вывода уравнений (8) дано не было.

3. Уравнениям первого приближения можно дать весьма простую интерпретацию. Поскольку при повороте на угол Δ коэффициенты дифференциальных уравнений почти не меняются, можно приближенно принять, что на первом этапе система описывается уравнениями $L\ddot{q} + R\dot{q} = u_a + E(t)$, $J\ddot{\varphi} - {}^1/_2\, L'\dot{q}^2 + f\dot{\varphi} = K(t)$, где $u_a = -L'\dot{\varphi}\dot{q}$. На следующих этапах, кроме u_a, действует еще «эдс коммутации» u_k, наводимая в основной цепи током $\dot{\varkappa}$, быстро меняющимся от 0 до $\dot{q}$. Ее среднее значение за весь цикл равно, очевидно, $\bar{u}_k = -\frac{1}{\tau}\int n\ddot{\varkappa}\, dt \approx -\frac{n}{\tau}\dot{q} \approx \frac{1}{2} L'\dot{\varphi}\dot{q}$. «Механическое» уравнение на всех этапах сохраняет свой вид, так как членами порядка Δ мы пренебрегаем. Таким образом мы можем принять, что в нашем случае катушку с самоиндукцией и сопротивлением R, кроме эдс $E(t)$, действует быстро меняющаяся эдс, равная в различные моменты времени или u_a или $u_a + u_k$; среднее значение этой эдс равно $-{}^1/_2 L'\dot{\varphi}\dot{q}$, откуда и следует уравнение (8)**. Такая интерпретация позволяет написать сразу дифференциальные уравнения первого приближения для модели любой коллекторной машины (со многими электрическими степенями свободы, а не выводить их из точных уравнений в конечных разностях.

Физико-технический институт при Горьковском государственном университете

Поступило 19 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. C. Maxwell, Proc. Roy. Soc., **15**, 397 (1867). [2] H. Poincaré, L'Eclairage électrique, **50**, No. 9, 293 (1907). [3] H. Barkhausen, Das Problem der Schwingungserzeugung, Leipzig, 1907. [4] В. В. Базилевич, Электричество, № 2, 94 (1930). [5] W. H. Ingram, Phil. Mag. (7), **17**, 844 (1934). [6] G. Kron, Journ. Math. and Phys., **13**, 103 (1934). [7] J. L. Synge, Bull. Am. Math. Soc., **42**, 38 (1936). [8] И. М. Садовский, Электричество, № 4, 13 (1949).

* Неконсервативность, обусловленная потерями энергии при коммутации, не содержится в уравнениях первого приближения: потери энергии в единицу времени порядка $l\dot{q}^2 N\dot{\varphi} \ll L'\dot{q}^2\dot{\varphi}$ — следовательно, диссипативный добавок много меньше членов, учтенных в уравнениях (6), (7).

** Баркгаузен, составляя уравнение движения своей модели коллекторной машины (([3]), стр. 39), не учел эдс коммутации и пришел поэтому к неверному уравнению для тока.