

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. Э. БЕРМАН

**К ВОПРОСУ О МЕХАНИЗМЕ ДЕФОРМАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
ВИНТОВЫХ ПРУЖИН КРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ С МАЛЫМ УГЛОМ  
ПОДЪЕМА**

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 12 XII 1951)

У цилиндрической винтовой пружины, нагруженной осевыми силами, все витки, за исключением крайних, находятся в одинаковых условиях, и достаточно рассмотреть лишь один виток. Учитывая к тому же, что угол подъема предполагается малым, виток предполагаем плоским.

Концы витка отогнуты к центру (рис. 1). Конец стержня  $BB_1$  закреплен в направляющих, допускающих вращение вокруг оси стержня  $BB_1$ , перемещение вдоль направляющих исключено. Виток лежит в горизонтальной плоскости и в точке  $A$  нагружен вертикальной силой  $P$ . Сечение, содержащее в себе круговую ось витка, мы называем срединным сечением витка, а поверхность, в которую оно превращается в результате деформации, — срединной поверхностью. Наши представления о механизме деформации, основанные на непосредственных наблюдениях над деформацией витка, мы формулируем в виде следующей гипотезы:

*При деформации плоского витка кругового сечения силами, приложенными вдоль его оси вращения, центральные оси поперечных сечений, нормальные к оси вращения до деформации, остаются прямолинейными и нормальными к оси вращения и после деформации и лишь перемещаются вдоль оси вращения; поперечные сечения остаются плоскими и нормальными к некоторой винтовой линии, лежащей в срединной винтовой поверхности витка.*

На основании сформулированной гипотезы заключаем, что срединное сечение витка превращается в прямой геликоид. В прямой геликоид превращается также любое сечение, параллельное срединному сечению витка. Виток после деформации представляет собой бесконечную совокупность винтовых линий с одинаковым шагом, но с разными углами подъема. Поперечные сечения после деформации нормальны к некоторой винтовой линии, лежащей в срединном геликоиде. Эту винтовую линию назовем главной винтовой линией, а окружность, из которой она образована, — главной окружностью.

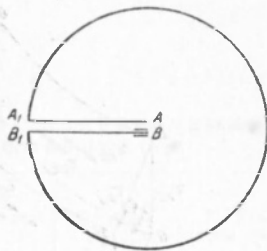


Рис. 1

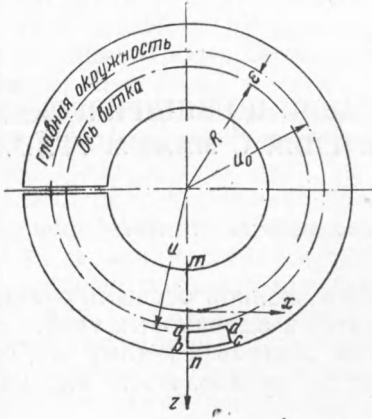
Изложенное представление о механизме деформации приводит к следующим формулам, определяющим компоненты напряжения

$$\tau_{xy} = C\alpha_0 \frac{z - \varepsilon}{u} = G\alpha_0 \frac{u - u_0}{u}, \quad \tau_{xz} = G\alpha_0 \frac{y}{u}, \quad (1)$$

где  $\alpha_0$  — угол подъема главной винтовой линии;  $u_0$  — радиус главной окружности;  $\varepsilon$  — смещение главной окружности (рис. 2).

Чтобы определить значения величин  $\alpha_0$  и  $u_0$ , используем условия равновесия отсеченной части витка

$$\sum Z = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M = 0.$$



Первое условие удовлетворяется тождественно. Второе и третье условия имеют вид

$$G\alpha_0 \int_F \frac{u - u_0}{u} dF + P = 0, \quad (2)$$

$$\int_F (u - u_0) dF + \int_F \frac{y^2 dF}{u} = 0.$$

Главная окружность пересекает поперечное сечение в точке, смещенной относительно центра на величину, равную

$$\varepsilon = u_0 - R.$$

Из уравнений (2) находим

$$G\alpha_0 = \frac{P}{u_0 \int_F \frac{dF}{u} - F}, \quad (3)$$

$$\varepsilon = u_0 - R = \frac{1}{F} \int_F \frac{y^2 dF}{u},$$

причем

$$\int_F \frac{dF}{u} = 2\pi (R - \sqrt{R^2 - r^2}),$$

$$\int_F \frac{y^2 dF}{u} = \frac{1}{3} [RF - 2\pi (R^2 - r^2) (R - \sqrt{R^2 - r^2})].$$

При малых значениях  $r/R$  эти формулы неудобны для числовых подсчетов, так как здесь приходится иметь дело с разностями близких величин.

Разлагая  $\sqrt{R^2 - r^2}$  в ряд

$$\sqrt{R^2 - r^2} = R \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{R} \right)^2 - \frac{1}{8} \left( \frac{r}{R} \right)^4 - \dots \right],$$

находим следующие приближенные значения для интегралов:

$$\int_F \frac{dF}{u} \approx \frac{F}{R} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad \int_F \frac{y^2 dF}{u} \approx \frac{1}{4} \frac{\pi r^4}{R}.$$

Подставляя в (3), находим

$$G\alpha_0 \approx \frac{P}{(R + \varepsilon) \frac{F}{R} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]} \approx \frac{PR^2}{I_p}, \quad \varepsilon \approx \frac{1}{4} \frac{r^2}{R} = \frac{1}{4} \left( \frac{r}{R} \right) r = \frac{1}{4} \left( \frac{r}{R} \right)^2 R, \quad (4)$$

где  $I_p$  — полярный момент инерции сечения. Найденные значения подставим в (1), тогда

$$\tau_{xy} = \frac{MR}{I_p} \frac{z - \varepsilon}{u}, \quad \tau_{xz} = \frac{MR}{I_p} \frac{y}{u}. \quad (5)$$

Численно наибольшее напряжение получается в точке контура, наиболее близкой к оси пружины, и равно

$$\tau_{\max} = \frac{M \rho'_{\max}}{I_p} \frac{R}{u_{\min}} = \frac{M}{W_p} \frac{1 + \frac{1}{4} \frac{r}{R}}{1 - \frac{r}{R}}. \quad (6)$$

Гёнер<sup>(1)</sup>, решая эту задачу методом последовательных приближений, в качестве третьего приближения дает формулу

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_p} \left( 1 + \frac{5}{4} \frac{r}{R} + \frac{7}{8} \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (7)$$

Точная формула Гёнера имеет вид

$$\tau_{\max} = \frac{M}{W_p} \frac{1}{1 - \frac{r}{R} + \frac{1}{4} \frac{r}{R} + \frac{1}{16} \frac{r^2}{R^2}}. \quad (8)$$

Значения поправочных коэффициентов к  $M/W_p$ , вычисленные по формулам (6), (7) и (8), даны в табл. 1.

Мы видим, что найденная нами формула дает результаты более точные, чем 3-е последовательное приближение Гёнера, и весьма близкие к результатам, получающимся по точной формуле. Что же касается направления равнодействующего напряжения, определяемого по найденным нами формулам, то отметим, что отклонение этого направления от истинного в точках контура для указанных в таблице значений  $r/R$  не превосходит  $3,5^\circ$ .

Таблица 1

Значения поправочных коэффициентов

$r/R$	По Гёнеру (3-е последовательн. приближ.)	По форм. автора	По Гёнеру (точн. форм.)
$1/4$	1,37	1,42	1,47
$1/5$	1,28	1,31	1,33
$1/6$	1,23	1,25	1,27
$1/8$	1,17	1,18	1,19
$1/10$	1,13	1,14	1,14

Поступило  
17 XI 1951

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> С. П. Тимошенко, Теория упругости, 1934, стр. 394.