Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ЯНЕНКО

О СВЯЗИ МЕЖДУ МЕТРИЧЕСКИМИ И ПРОЕКТИВНЫМИ СВОЙСТВАМИ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 19 XII 1951)

1. В предыдущих заметках ([1,2]) нами были даны определения проективно инвариантных понятий ранга поверхности и фокальных плоскостей поверхности и в этих проективно инвариантных терминах сформулирован ряд необходимых признаков изгибаемых поверхностей.

Как известно из этих заметок, поверхность $V_m \subset E_{m+q}$, допускающая собственное изгибание $V_m \backsim \overline{V}_m$, допускает расслоение на ∞^r плоских образующих E_{m-r}, вдоль которых q-нормаль $\xi_1 \ldots \xi_q$ остается постоянной. Удалось установить дальнейший необходимый признак собственного изгибания, характеризующий инфинитезимальную структуру пересечений плоских образующих. Именно, справедлива следующая теорема:

Теорема 1. *Плоскость $E_r \perp E_{m-r}$ ($E_r + E_{m-r} = E_m$, где E_m — касательная плоскость к V_m) может быть представлена в виде*

$$E_r = E_{\rho_1} + E_{\rho_2} + \ldots + E_{\rho_p} \quad (\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_p = r), \tag{1}$$

причем каждое направление плоскости E_{ρ_s} является фокальным и любая плоскость, построенная на фокальных направлениях, является фокальной. Этот необходимый признак также является проективно-инвариантным.

Аналитически этот факт означает наличие репера $J_1 \ldots J_r, J_{r+1} \ldots J_m$, $J_{m+1} = \xi_1, \ldots, J_{m+q} = \xi_q$ (удовлетворяющего требованиям $J_{m+s} J_\alpha = \delta_{m+s\alpha}$, $s = 1, \ldots, q$, $\alpha = 1, \ldots, m+q$), в котором формы Картана ω^α, ω^α_β имеют вид:

$$\omega_\alpha^{m+s} = \omega^\alpha_{m+s} = 0, \quad s = 1, \ldots, q, \quad \alpha = r+1, \ldots, m:$$

$$\omega^i_\alpha = a^i_{\alpha_i} \omega^i = \varkappa_\alpha \omega^i,$$

$$i = 1, \ldots, r, \alpha = r+1, \ldots, m \text{ (по } i \text{ не суммируется)}, \tag{2}$$

$$\omega^{m+s}_{i_\tau} = \sum_{j_\tau} \lambda^s_{i_\tau j_\tau} \omega^{j_\tau}, \quad \lambda^s_{i_{\tau_1} i_{\tau_1}} = 0, \quad \varkappa_{\alpha i_{\tau_1}} \neq \varkappa_{\alpha i_{\tau_2}}.$$

Такой репер мы будем называть ф о к а л ь н ы м. Отличительный его признак состоит в том, что векторы $J_1 \ldots J_r$ являются фокальными векторами.

Если формы ω^i являются дифференциалами: $\omega^i = du^i$, то фокальный репер $J_1 \ldots J_m$ будем называть голономным.

Теорема 2. *Радиус-вектор r собственно изгибаемой поверхности с голономным фокальным репером удовлетворяет системе дифференциальных уравнений:*

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^i\,\partial u^j}=a^i_{ij}\frac{\partial r}{\partial u^i}+a^j_{ij}\frac{\partial r}{\partial u^j}+a^\alpha_{ij}\frac{\partial r}{\partial u^\alpha},\quad i\neq j,\quad \alpha=r+1,\ldots,m;$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^i\,\partial u^\alpha}=a^i_{\alpha_i}\frac{\partial r}{\partial u^i}+a^\beta_{\alpha_i}\frac{\partial r}{\partial u^\beta},\quad i=1,\ldots,r,\qquad \alpha=r+1,\ldots,m;\qquad (3)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial u^\alpha\,\partial u^\beta}=0,\quad \alpha,\beta=r+1,\ldots,m.$$

Обратно, если радиус-вектор r поверхности $V_m\subset E_{m+q}$ удовлетворяет системе (3), *поверхность V_m есть поверхность ранга r с голономным фокальным репером.*

Переходя к тангенциальным координатам, можно дать иную дифференциальную характеристику изгибаемым поверхностям.

Пусть π_s есть левая часть уравнения

$$\pi_s=J_{m+s}(r-r_0)=0\qquad (4)$$

касательной гиперплоскости E_{m+q-1} к поверхности V_m в точке M с радиусом-вектором r_0.

Теорема 3. *Левые части π_s уравнения касательных гиперповерхностей к собственно изгибаемой поверхности с голономным фокальным репером удовлетворяют системе уравнений:*

$$\frac{\partial\pi_s}{\partial u^{i_k}}=-\sum_{j_k}\lambda^s_{i_k j_k}P^{j_k}+\mu^\tau_{si_k}\pi_\tau,\quad \{i_1\}+\ldots+\{i_p\}=[1\ldots r];$$

$$i_1=1,\ldots,\rho_1,\ i_2=\rho_1+1,\ldots,\rho_2,\ldots,\ i_p=\rho_{p-1}+1,\ldots,\rho_p=r;\qquad (5)$$

$$\frac{\partial^2\pi_s}{\partial u^i\,\partial u^{i_l}}=\sum\lambda_{si_k i_l j_k}P^{j_k}+\sum\lambda_{si_k i_l j_l}P^{j_l}+\mu^\tau_{si_k i_l}\pi_\tau,\quad k\neq l,$$

где $P^j=0$ — уравнение некоторых гиперплоскостей. Исключая P^j, получаем уравнение:

$$\frac{\partial^2\pi_s}{\partial u^{i_k}\,\partial u^{i_l}}=\sum_{j_k,t}\alpha_{si_k i_l j_k t}\frac{\partial\pi_t}{\partial u^{j_k}}+\sum_{j_l,t}\alpha_{si_l i_k j_l t}\frac{\partial\pi_t}{\partial u^{j_l}}+\gamma^\tau_{si_k i_l}\pi_\tau;$$

$$\left[\frac{\partial\pi_{s_1}}{\partial u^{\rho_k+1}}\ \frac{\partial\pi_{s_2}}{\partial u^{\rho_k+2}}\cdots\frac{\partial\pi_s}{\partial u^{\rho_k+1}}\ \frac{\partial\pi_s}{\partial u^{i_{k+1}}}\right]=0,\qquad (6)$$

$$s_1,s_2,\ldots,s=1,\ldots,q,\quad k=0,\ldots,p-1,$$

где $[\ ]=0$ означает линейную зависимость векторов в скобке.

В частности, собственно изгибаемая поверхность с конечным числом фокальных плоскостей всегда имеет голономный фокальный репер и удовлетворяет системе уравнений:

$$\frac{\partial^2\pi_s}{\partial u^i\,\partial u^j}=\alpha_{sij}\frac{\partial\pi_s}{\partial u^i}+\alpha_{sji}\frac{\partial\pi_s}{\partial u^j}+\gamma^\tau_{sij}\pi_\tau,\quad s,\tau=1,\ldots,q;\ i,j=1,\ldots,r;\ i\neq j;$$

$$\frac{\partial\pi_s}{\partial u_i}\Big/\varkappa^s_i-\frac{\partial\pi_\tau}{\partial u_i}\Big/\varkappa^t_i=\sum_{\tau=1}^{q}k^\tau_{sti}\pi_\tau,\quad s,t,\tau=1,\ldots,q;\ i=1,\ldots,r\leqslant 2q.\qquad (7)$$

2. Для того чтобы поверхность $V_m \subset E_{m+q}$ допускала изгибание, необходимо, чтобы коэффициенты α_{sij}, $\varkappa_i^s$ удовлетворяли некоторым условиям.

В случае $q=2$, $r=4$, $\begin{vmatrix} \varkappa_i^1 & \varkappa_j^1 \\ \varkappa_i^2 & \varkappa_j^2 \end{vmatrix} \neq 0$ можно сформулировать необходимые и достаточные условия собственного изгибания* поверхности.

Образуем величины:

$$\sigma_i = \sum_{s=1}^{2} \varkappa_i^s \varkappa_i^s, \quad \sigma_{ij} = \sum_{s=1}^{2} \varkappa_i^s \varkappa_j^r, \quad i, j = 1, \ldots, 4,$$

$$\alpha_{ijk} = 2\left(\alpha_{sij} - \frac{\partial \ln \varkappa_i^s}{\partial u^j}\right) + \frac{\partial \ln\left(\sigma_i - \dfrac{\sigma_{ij}\sigma_{il}}{\sigma_{kl}}\right)}{\partial u^j}, \tag{8}$$

$$\alpha_{ij} = 2\left(\alpha_{sij} - \frac{\partial \ln \varkappa_i^s}{\partial u^j}\right) + \frac{\partial \ln\left(\sigma_i - \dfrac{\sigma_{ik}\sigma_{il}}{\sigma_{kl}}\right)}{\partial u^j},$$

$$i \neq j \neq k \neq l, \quad i, j, k, l = 1, \ldots, 4.$$

Теорема 4. *Необходимое и достаточное условие того, чтобы поверхность общего положения допускала изгибание на ∞ неконгруентных поверхностей, имеет вид*:

$$\begin{gathered} \alpha_{ijk} = 0, \quad i \neq j \neq k, \quad i, j, k = 1, \ldots, 4, \\ \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial u^i} = \frac{\partial \alpha_{ji}}{\partial u^j} = \alpha_{ij}\alpha_{ji}, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, 4. \end{gathered} \tag{9}$$

Эти необходимые и достаточные условия являются аналогом формул, полученных для изгибаемых гиперповерхностей Сбрана и Картаном.

С поверхностью общего положения можно ассоциировать систему инвариантов S_i, удовлетворяющую уравнениям:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}\frac{\partial S_i}{\partial u^j} = a_{ij}^i S_i - a_{ii}^j \Sigma_{ij}, \quad \frac{1}{2}\frac{\partial S_i}{\partial u^\alpha} = a_{i\alpha}^i S_i, \\ (S_i - A_{ij})(S_i - A_{ji}) = C_{ij}, \end{gathered} \tag{10}$$

где A_{ij}, C_{ij}, Σ_{ij} суть внутренние величины, связанные с метрикой поверхности.

Для того чтобы поверхность V_m допускала непрерывное изгибание, необходимо и достаточно, чтобы система (10) допускала бесконечное число решений.

Пусть S_i^0 — инварианты данной поверхности, S — инварианты ей изометричной,

$$\sigma_i = \frac{1}{S_i - S_i^0}.$$

Величины σ_i удовлетворяют системе уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial u^\alpha} - a_{i\alpha}^i \sigma_i = 0, \quad B_{ij}\sigma_i + B_{ji}\sigma_j = 1, \quad i,j = 1,\ldots,4;\ \alpha = 1,\ldots,m;\ i \neq \alpha,\ i \neq j. \tag{11}$$

---

* Поскольку рассматриваемый класс поверхностей определяется неравенствами, мы будем называть такие поверхности поверхностями общего положения. Можно показать, что поверхности общего положения допускают только собственное изгибание.

Из линейности системы (11) сразу следует такое свойство изгибаемых поверхностей:

Если имеются две поверхности $\overline{V}_m$, неконгруентные между собой и с V_m и изометричные V_m, то существует ∞ поверхностей $\overline{V}_m \backsim V_m$, т. е. существует непрерывное изгибание.

Таким образом, в случае дискретного изгибания существует только одна поверхность:

$$\overline{V}_m \not\equiv V_m, \qquad \overline{V}_m \backsim V_m.$$

3. Для многомерных поверхностей понятия бесконечно малого изгибания можно сформулировать совершенно аналогично трехмерному случаю как бесконечно малую деформацию δr поверхности, удовлетворяющую условию $\delta\, dr^2 = 0$, т. е. сохраняющую метрику с точностью до бесконечно малых второго порядка.

Но, в отличие от трехмерного, в многомерном пространстве не всякая поверхность допускает бесконечно малое изгибание. Таким образом, нежесткие поверхности составляют некоторый класс П.

Теорема 5. *Класс* П *является проективно инвариантным, т. е. любое проективное преобразование переводит нежесткую поверхность в нежесткую же.*

Таким образом, наличие бесконечно малого изгибания является максимальной проективно инвариантной характеристикой непрерывно изгибаемых поверхностей, составляя естественную грань, разделяющую проективные признаки изгибания от непроективных.

Между бесконечно малыми изгибаниями и конечными изгибаниями существует определенная связь.

Теорема 6. *Если поверхность* $V_m \subset E_{m+2}$ *общего положения допускает конечное изгибание и бесконечно малое изгибание, то она допускает и непрерывное изгибание.*

Теорема 7. *Всякая нежесткая поверхность общего положения аппроксимируется дискретно изгибаемыми поверхностями.*

Эти результаты проще всего могут быть проиллюстрированы на примере изгибаемых гиперповерхностей. Согласно классификации Сбрана — Картана, непрерывно изгибаемые гиперповерхности разделяются на следующие классы: I — гиперплоскости и развертывающие гиперповерхности (поверхности ранга 0,1); II — цилиндрические и конические поверхности (поверхности ранга 2 с ∞ фокальных направлений); III — поверхности ранга 2 с одним кратным фокальным направлением; IV — поверхности ранга 2 с двумя фокальными направлениями. Эти поверхности удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial u\, \partial v} = \alpha \frac{\partial \pi}{\partial u} + \beta \frac{\partial \pi}{\partial v} + \gamma \pi, \tag{12}$$

где π — нормированная левая часть уравнения касательной плоскости поверхности. а коэффициенты α, β удовлетворяют условию

$$\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial v} = \alpha\beta. \tag{13}$$

Классы I — III проективно инвариантны, класс IV — нет. Однако, если рассмотреть класс IV* нежестких поверхностей ранга 2 с двумя фокальными направлениями, то они попрежнему удовлетворяют уравнению (12), коэффициенты α, β удовлетворяют условию $\frac{\partial \alpha}{\partial u} = \frac{\partial \beta}{\partial v}$, которое уже является проективно-инвариантным. Таким образом, класс IV* является проективно-инвариантным.

Поступило
31 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Яненко, ДАН, **65**, № 4 (1949). [2] Н. Н. Яненко, ДАН, **72**, № 6 (1950).