Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 3

ФИЗИКА

Е. КОНДОРСКИЙ

К ТЕОРИИ ОДНОДОМЕННЫХ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 20 XI 1951)

Ранее ([1], [2]) нами были рассмотрены: 1) условия, при которых эллипсоидальные частицы ферромагнитного порошка являются однодоменными; 2) зависимость коэрцитивной силы от размеров частиц и их объемной концентрации. Новый вывод заключался в доказательстве существования конечных размеров однодоменных частиц и в том, что критические размеры их зависят от магнитного поля. Иначе говоря, частицы, которые при отсутствии магнитного поля являются однодоменными, в процессе перемагничивания могут перестать быть таковыми. В этом случае коэрцитивная сила не достигает максимального возможного значения, которое получается, если частицы порошка являются абсолютно однодоменными, т. е. остаются однородно намагниченными при всех значениях внешнего поля. Указанный вывод имеет существенное значение. Действительно, малая полуось R эллипсоидальных однодоменных частиц, вычисленная приближенно Стонером и Вольфартом ([3]) без учета возможного разрушения однодоменной структуры полем, связана с формой частиц условием $R \leqslant C / \sqrt{N_a}$, где N_a — размагничивающий фактор вдоль длинной оси, C — постоянная, не зависящая от формы частицы. Если принять во внимание влияние магнитного поля в процессе перемагничивания, как было показано нами в ([1], [2]), для малой полуоси R_0 абсолютно однодоменных эллипсоидальных частиц получается совсем другое условие, а именно $R_0 \leqslant \mathrm{const} / \sqrt{N_R}$, где N_R — размагничивающий фактор вдоль короткой оси. При удлинении частиц R увеличивается, в то время как R_0 уменьшается.

Расчет R_0 связан с решением вариационной задачи. Эта задача заключается в нахождении вида функций, представляющих слагающие намагничения $I_x(x, y, z)$, $I_y(x, y, z)$ и $I_z(x, y, z)$, соответствующего минимуму свободной энергии W.

В статьях ([1], [2]) была произвольно выбрана частная форма этих функций и расчет W был выполнен приближенно. Дальнейшие вычисления показали, что хотя минимуму W соответствует другой вид функций I_x, I_y и I_z, однако отмеченные выше принципиальные выводы остаются без изменений. Ниже описывается последовательный метод решения вариационной задачи и приводятся основные результаты, получаемые с помощью этого метода.

Условия задачи можно формулировать следующим образом: заданы большая и малая полуоси a и R частицы, имеющей форму эллипсоида вращения; абсолютная величина вектора намагниченности $\mathbf{I}_s$, значение K константы магнитной анизотропии; значение параметра обменной энергии $A = z^2 J$, где J — обменный интеграл, z — число нескомпенсированных спинов на атом (J можно определить по температурной зависимости при низких температурах с помощью формулы Блоха — Мёлера). Требуется определить функции I_x, I_y и I_z, соответствующие минимуму свободной энергии W, и то значение R, при котором частица остается намагниченной однородно при любых направлениях вектора $\mathbf{I}_s$.

Совместим ось z прямоугольной системы координат с направлением длинной оси частицы. Ограничимся случаем, когда единственная ось легкого намагничивания направлена вдоль длинной оси частицы и в том же направлении приложено однородное внешнее поле H. Тогда выражение свободной энергии W представляется в следующем виде

$$
\begin{gathered}
W = W_m + W_A + W_K + W_H, \\
W_m = \frac{1}{2}\int\limits_S \sigma V_i\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_v \rho V_i\,dv, \\
W_A = \frac{cA}{a_0 I_s^2}\int\limits_v [(\nabla I_x)^2 + (\nabla I_y)^2 + (\nabla I_z)^2]\,dv, \\
W_K = \frac{K}{I_s^2}\int\limits_v (I_x^2 + I_y^2)\,dv, \quad W_H = -H\int\limits_v I_z\,dv,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\sigma = I_s \cos(\mathbf{n}\mathbf{I}_s)$ — поверхностная плотность магнитных зарядов; $\rho = \operatorname{div}\mathbf{I}_s$ — их объемная плотность; a_0 — расстояние между атомами кубической решетки вдоль ребра куба; $c = {}^1/_2$, 1, 2, соответственно, для простой, пространственно центрированной и гранецентрированной решетки; V_i и V_e — внутренний и внешний потенциалы поля, создаваемого магнитными зарядами частицы. Уравнения для них имеют вид:

$$
\Delta V_i = -4\pi\rho; \quad \Delta V_e = 0; \qquad \frac{\partial V_e}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n} = -4\pi\sigma. \tag{2}
$$

Из формулы (1) следует, что при достаточно малых R даже небольшое отклонение намагничения от однородного ведет к существенному приращению W_A. Это значит, что при достаточно малых R слагающая I_z вдоль оси легкого намагничения будет разностью постоянной I_s и некоторой малой величины, а слагающие I_x и I_y будут малыми величинами. Последнее обстоятельство позволяет использовать для решения задачи при малых R метод Ритца. Введем вместо I_x и I_y слагающие намагничения в цилиндрических координатах I_φ и I_r. Легко видеть, что минимум W получается, когда $I_r = 0$, так как при неизменной I_z увеличение I_r за счет I_φ увеличивает W_m, не изменяя других членов в (1). Полагая $I_r = 0$ и обозначая через ε малый угол между $\mathbf{I}_s$ и осью z, получим: $I_z = I_s \cos\varepsilon$; $I_\varphi = I_s \sin\varepsilon$. Следуя методу Ритца, представим ε в виде ряда

$$
\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{r}{R} + \varepsilon_3\left(\frac{r}{R}\right)^3 + \varepsilon_{12}\frac{r}{R}\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \cdots \tag{3}
$$

и будем искать неизвестные малые коэффициенты ε_1, ε_3, ε_{12} и т. д. из условия минимума W. При расчете ε мы будем учитывать лишь два первых члена в (3). В этом случае $\operatorname{div}\mathbf{I}_s = 0$ и потенциал V_i, как и V_e, удовлетворяет уравнению Лапласа.

Введем эллипсоидальную систему с координатами ξ, η и φ, определяемыми уравнениями: $x = c_0\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\cos\varphi$, $y = c_0\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}\sin\varphi$, $z = c_0\xi\eta$, где $c_0 = \sqrt{a^2 - R^2}$, $1 < \xi < \infty$, $-1 < \eta < +1$, $0 < \varphi < 2\pi$.

В этой системе координат уравнение Лапласа подстановкой $V = V_1(\xi) V_2(\eta) V_3(\varphi)$ разбивается на три уравнения:

$$\frac{d}{d\alpha}\left[(1-\alpha^2)\frac{dV_k}{d\alpha}\right] + V_k\left[-\frac{\mu^2}{1-\alpha^2} + \nu(\nu+1)\right] = 0,$$

$$\alpha = \xi,\ \eta,\ k = 1, 2,\quad \nu,\ \mu = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$

$$\frac{d^2 V_3}{d\varphi^2} = -\mu^2 V_3.$$

Вследствие симметрии задачи $\mu = 0$, $V_3(\varphi) = \text{const}$, и потенциалы V_i и V_e являются функциями только ξ и η. В этом случае общее решение (4) имеет вид

$$V_i = \sum_n K_n \mathfrak{P}_n(\xi) P_n(\eta), \qquad V_e = \sum_n L_n \mathfrak{Q}_n(\xi) P_n(\eta), \tag{5}$$

где $\mathfrak{P}_n(\xi)$, $P_n(\eta)$ — функции Лежандра 1-го рода, $\mathfrak{Q}_n(\xi)$ — функции Лежандра 2-го рода. Коэффициенты K_n и L_n определяются из условия (2) и условия непрерывности потенциала на поверхности частицы $\xi = \xi_0$, которое в выбранной системе координат записывается в виде $(V_i)_{\xi_0} = (V_e)_{\xi_0}$. С помощью этого условия можно выразить коэффициенты L_n через K_n или наоборот. Условие (2) в рассматриваемом случае будет иметь вид

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial \xi}\right)_{\xi_0} - \left(\frac{\partial V_i}{\partial \xi}\right)_{\xi_0} = -\frac{4\pi\sigma}{U_{\xi_0}},$$

где

$$U = \frac{1}{\sqrt{(\partial x/\partial\xi)^2 + (\partial y/\partial\xi)^2 + (\partial z/\partial\xi)^2}} = \frac{1}{c_0}\sqrt{\frac{\xi^2-1}{\xi^2-\eta^2}},$$

$$\sigma = I_s \cos(\mathbf{n}\mathbf{I}_s) = I_s \cos(\mathbf{n}\mathbf{z}) \cos\varepsilon = I_s \frac{\partial z}{\partial \xi} U_{\xi_0}\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{24} - \ldots\right).$$

Подставляя ε из (3), получим из двух последних уравнений

$$\left(\frac{\partial V_e}{\partial \xi}\right)_{\xi_0} - \left(\frac{\partial V_i}{\partial \xi}\right)_{\xi_0} = -4\pi I_s \sqrt{a^2 - R^2}\,\eta\left[1 - \frac{\varepsilon_1^2}{2R^2}(a^2 - R^2)(1+\xi_0^2)(1-\eta^2) + \ldots\right]. \tag{6}$$

Правая часть (6) представляет полином относительно η и может быть выражена через полиномы $P_n(\eta)$. Подставляя в (6) V_i и V_e из (5) и сравнивая коэффициенты при соответствующих $P_n(\eta)$, найдем K_n. Подставляя V_i, σ и слагающие вектора $\mathbf{I}_s$, выраженные через I_s, ε_1 и ε_3 в (1), найдем W.

Вычисление, если ограничиться членами, содержащими ε_1^2, $\varepsilon_1\varepsilon_3$, ε_3^2, ε_1^4, $\varepsilon_1^3\varepsilon_3$ (члены нечетных порядков выпадают), дает

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2} N_a I_s^2\left[1 - \frac{2}{5}\varepsilon_1^2\left(1 - \frac{8}{7}\varkappa + \frac{8}{21}\varkappa^2\right) + \frac{244}{3675}\varepsilon_1^4\left(1 - \frac{464}{183}\varkappa\right)\right] v,\\
W_A &= 2\frac{cA}{a_0 R^2}\varepsilon_1^2\left[1 - \frac{8}{5}\varkappa + \frac{8}{7}\varkappa^2 - \frac{1}{15}\varepsilon_1^2\left(1 - \frac{16}{7}\varkappa\right)\right] v,\\
W_K &= \frac{2K}{5}\varepsilon_1^2\left[1 - \frac{8}{7}\varkappa + \frac{8}{21}\varkappa^2 - \frac{8}{105}\varepsilon_1^2\left(1 - \frac{8}{3}\varkappa\right)\right] v,\\
W_H &= -HI_s\left[1 - \frac{1}{5}\varepsilon_1^2\left(1 - \frac{8}{7}\varkappa + \frac{8}{21}\varkappa^2\right) - \frac{1}{105}\varepsilon_1^4\left(1 - \frac{8}{3}\varkappa\right)\right] v,
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\varkappa = -\varepsilon_3 / \varepsilon_1$, N_a — размагничивающий фактор вдоль оси a и $v = \frac{4\pi}{3} aR^2$ — объем частицы. Из уравнений $\partial W / \partial \varepsilon_1 = 0$ и $\partial W / \partial \varkappa = 0$ находим ε_1 и $\varkappa$, соответствующие минимуму W при заданных значениях R, N_a, A, K и H (при малых ε_1 получается $\varkappa > 0$, $\varepsilon_3 < 0$). Полагая $\varepsilon_1 = 0$, находим то наибольшее значение R, при котором намагниченность остается однородной. Вычисление дает следующее условие однородности намагничения

$$R \leqslant \frac{m}{I_s} \sqrt{\frac{10cA}{a_0 (N_a - H / I_s - 2K / I_s^2)}}, \tag{8}$$

где m — поправочный множитель, вносимый членами, содержащими $\varkappa$, $m = \sqrt{\frac{33}{5(4 + \sqrt{79/7})}} \approx 0{,}95$. Частица остается намагниченной однородно при всех значениях поля $|H| \leqslant H_{c\max} = I_s (N_R - N_a) + 2K / I_s$, т. е. будет абсолютно однодоменной, если

$$R \leqslant R_0 = \frac{m}{I_s} \sqrt{\frac{10\,cA}{a_0 N_R}} \approx \frac{0{,}95}{I_s} \sqrt{\frac{10\,cA}{a_0 N_R}}, \tag{9}$$

где N_R — размагничивающий фактор вдоль малой оси частицы. Это условие с точностью до множителя 0,95 совпадает с условием однодоменности, полученным нами ранее ([2]) при весьма грубом приближении и при другом виде функций I_x, I_y и I_z*.

Аналогичным методом можно получить выражение для свободной энергии W в случае, когда одна из слагающих I_x или I_y не является малой величиной, и из условия минимума W вывести зависимость коэрцитивной силы от радиуса R частицы при $R > R_0$. Вычисление для сферической частицы приводит к формуле вида

$$H_c = \frac{2K}{I_s} \left[1 - p\left(1 - \frac{R_0^2}{R^2}\right)\right], \tag{10}$$

где p — коэффициент, зависящий от I_s, K и N. В свою очередь, N, как было нами показано ([4]), зависит от концентрации частиц в порошке. При малых концентрациях железных частиц p является величиной порядка 10. Из (10) следует, что в этом случае в области $R \geqslant R_0$ H_c резко уменьшается.

Институт физики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Кондорский, ДАН, **70**, 215 (1950). [2] Е. Кондорский, ДАН, **74**, 213 (1950). [3] E. C. Stoner and E. P. Wohlfahrth, Phil. Trans. Roy. Soc. London, **240**, 599 (1948). [4] Е. Кондорский, ДАН, **80**, 197 (1951).

* Таким образом, значения R_0 для $N = 4\pi/3$, приведенные в первом столбце табл. 1 в ([2]), остаются действительными. Цифры, приведенные во втором столбце этой таблицы, следует считать значениями R_0 для $N_R = 2\pi$, а не l_0, как было указано в ([2]). Расчет, приведенный выше, показывает, что при соблюдении условия (9) частица является абсолютно однодоменной независимо от величины a. Поэтому выводы в ([2]), иллюстрированные рис. 2, следует считать недействительными, как и формулы той же статьи для H_c.