Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 3

ГИДРОМЕХАНИКА

С. В. ВАЛЛАНДЕР

РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 27 XI 1951)

Во всех известных работах, посвященных расчету обтекания решетки профилей потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости, расчет обтекания решетки оказывается существенно более сложным, чем расчет обтекания изолированного профиля.

В настоящей работе предлагается такой метод расчета обтекания бесконечной решетки, при котором расчет обтекания решетки не сложнее расчета обтекания изолированного профиля.

I. Известно [1,2], что функция комплексного переменного ζ

$$w_п = \varphi_п + i\psi_п = \frac{te^{i\beta_п}}{2\pi i}\left[\ln\frac{\zeta+R}{\zeta-R} + e^{-2i\beta_п}\ln\frac{\zeta-1/R}{\zeta+1/R}\right] \tag{1}$$

отображает внешность единичного круга с центром в начале координат плоскости ζ на внешность решетки пластин с комплексным периодом $te^{i\beta_п}$. При этом пластины оказываются параллельными оси $\varphi_п$, величина R оказывается известной функцией величин $t/l_п$ и $\beta_п$, где $l_п$ — длина пластины; точки $\zeta_1 = e^{i\vartheta_0}$ и $\zeta_2 = -e^{i\vartheta_0}$ оказываются соответствующими передним и задним концам пластин, а сами величины ζ_1 и ζ_2 находятся из уравнения

$$\zeta_2 = \frac{R_2 - e^{2i\beta_п}}{1 - R^2 e^{2i\beta_п}}. \tag{2}$$

II. Рассмотрим в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ решетку профилей с комплексным периодом $te^{i\beta}$ и хордой l. Под хордой профиля будем понимать отрезок, соединяющий две точки профиля, наиболее удаленные друг от друга. Направим ось x параллельно хордам профилей решетки.

Обозначим через $w_п$ комплексный потенциал бесциркуляционного потока, обтекающего решетку с единичной скоростью на бесконечности и со сходом линий тока с задних кромок профилей.

Функция $w_п(z)$ будет однозначной функцией z и может быть представлена в виде

$$w_п = e^{-i\alpha} z + F(z), \tag{3}$$

где $F(z)$ — ограниченная во всей внешности решетки периодическая функция с периодом $te^{i\beta}$ и α — угол между осью x и направлением бесциркуляционного потока на бесконечности.

Из (3) видно, что при изменении z на период решетки $te^{i\beta}$ функция $w_п$ испытывает изменение $te^{i(\beta-\alpha)} = te^{i\beta_п}$. Обозначим через $l_п$ разность значений вещественной части $w_п$ в передней критической точке A какого-либо профиля и в его задней кромке B. Так как при изменении z на период $te^{i\beta}$ $w_п$ испытывает постоянное приращение $te^{i\beta_п}$, то ту же разность значений вещественной части $w_п$ будем иметь и для всех профилей, если будем рассматривать соответственные точки A_k, B_k.

Сказанного достаточно для того, чтобы заключить, что функция $w_п(z)$ отображает решетку профилей в плоскости z на решетку пластин с хордой $l_п$ и комплексным периодом $te^{i\beta_п}$, расположенную в плоскости $w_п = \varphi_п + i\psi_п$. Получающиеся в результате такого отображения пластины оказываются параллельными оси $\varphi_п$.

Рассмотрим теперь функцию, обратную по отношению к (3). Эта функция тоже будет однозначной и будет отображать внешность решетки из пластин на внешность решетки профилей. Она может быть представлена в виде:

$$z = e^{i\alpha} w_п + \tilde{\Phi}(w_п), \tag{4}$$

где $\tilde{\Phi}(w_п)$ — ограниченная во всей внешности решетки пластин периодическая функция с периодом $te^{i\beta_п}$.

Отобразим внешность решетки пластин плоскости $w_п$ на внешность круга единичного радиуса в плоскости ζ при помощи (1). Подставляя (1) в (4), получим отображение внешности единичного круга на внешность исходной решетки профилей. Обратим внимание на то, что функция $\tilde{\Phi}(w_п)$ периодическая с периодом $te^{i\beta_п}$, а функция $w_п(\zeta)$ бесконечно многозначная и притом такая, что все ее значения при определенном ζ получаются добавлением к одному ее значению целой кратной величины $te^{i\beta_п}$. Добавление целой кратной величины $te^{i\beta_п}$ не отражается на значении $\tilde{\Phi}$ из-за ее периодичности. Поэтому в результате подстановки (1) в $\tilde{\Phi}(w_п)$ получим однозначную функцию $\Phi(\zeta)$, регулярную во всей внешности единичного круга. Такая функция раскладывается в ряд Лорана по отрицательным степеням ζ.

Следовательно, имеем следующую связь между плоскостями ζ и z:

$$z = \frac{te^{i\beta}}{2\pi i}\left[\ln\frac{\zeta + R}{\zeta - R} + e^{-2i\beta_п}\ln\frac{\zeta - 1/R}{\zeta + 1/R}\right] + \Phi(\zeta), \tag{5}$$

или

$$z = \frac{te^{i\beta}}{2\pi i}\left[\ln\frac{\zeta + R}{\zeta - R} + e^{-2i\beta_п}\ln\frac{\zeta - 1/R}{\zeta + 1/R}\right] + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{\zeta^n}. \tag{6}$$

В последнем равенстве неизвестны величины $\beta_п$, R и C_n. Величины $\beta_п$ и R вещественны, а C_n, вообще говоря, комплексны. Эти величины определяются из соответствия контура единичного круга и контура одного из профилей решетки при выборе какой-нибудь одной ветви логарифма в правой части (6).

На контуре круга мы должны положить $\zeta = e^{i\vartheta}$. Кроме того, положим

$$z = x + iy, \quad C_n = A_n + iB_n,$$

$$\frac{te^{i\beta}}{2\pi i}\left[\ln\frac{e^{i\vartheta} + R}{e^{i\vartheta} - R} + e^{-2i\beta_п}\ln\frac{e^{i\vartheta} - 1/R}{e^{i\vartheta} + 1/R}\right] = P(R, \beta_п, \vartheta), \tag{7}$$

причем функция $P(R, \beta_п, \vartheta)$ будет вещественной при соответствующем выборе ветви логарифма.

Отделяя в (6) вещественную и мнимую части, получим:

$$x = P(R, \beta_п, \vartheta) + A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\vartheta - B_n \sin n\vartheta), \tag{8}$$

$$y = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(B_n \cos n\vartheta + A_n \sin n\vartheta). \tag{9}$$

Из (8) и (9) видим, что задача конформного отображения внешности единичного круга на внешность решетки профилей эквивалентна задаче представления контура одиночного профиля параметрическими уравнениями, содержащими сопряженные тригонометрические ряды, и принципиально не отлична от соответствующей задачи для изолированного профиля.

III. Строгое и практически весьма эффективное решение задачи о параметрическом представлении уравнения контура сопряженными тригонометрическими рядами имеется в работе С. Г. Нужина [3]. Метод Нужина состоит в выполнении последовательных приближений и с незначительными модификациями переносится на решетку. Не разбирая практических деталей, отметим, что в нулевом приближении следует положить

$$\begin{aligned} &A_n^{(0)} = B_n^{(0)} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots); \qquad R^{(0)} = R\left(\beta, \frac{l}{t}\right); \\ &\beta_п^{(0)} = \beta; \qquad \vartheta_0^{(0)} = \vartheta_0\left(\beta, \frac{l}{t}\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда (8) дает зависимость $x^{(0)}(\vartheta)$. По этой зависимости с чертежа снимаем $y^{(0)}(\vartheta)$ и при помощи (9) определяем коэффициенты Фурье первого приближения $A_n^{(1)}$ и $B_n^{(1)}$.

Чтобы найти первое приближение к величинам $\beta_п$, R и ϑ_0, подставим $A_n^{(1)}$ и $B_n^{(1)}$ в (8), считая $\beta_п$ и R неизвестными. Запишем в виде уравнений, что при $\vartheta = \vartheta_0^{(0)}$ мы должны иметь $\min x^{(0)}(\vartheta)$ и что разность $\max x^{(0)}(\vartheta) - \min x^{(0)}(\vartheta)$ должна быть равна хорде l решетки. Тогда, решая полученные уравнения, найдем $\beta_п^{(1)}$ и $R^{(1)}$, а применяя (2), найдем $\vartheta_0^{(1)}$. С полученными величинами первого приближения повторяем описанные операции и т. д.

Процесс сходится и дает все величины, входящие в (6).

IV. Имея конформное отображение (6), можем решить задачу о построении потока, обтекающего решетку с заданной комплексной скоростью $U - iV$ перед решеткой. Обозначим неизвестную пока циркуляцию профиля через Γ. Тогда на бесконечности после решетки будем иметь комплексную скорость $U - iV + \frac{\Gamma}{t} e^{-i\beta}$.

Обозначим через $w(z) = W(\zeta)$ комплексный потенциал обтекания решетки профилей. В плоскости ζ обтекание решетки будет представляться обтеканием единичного круга потоком от двух вихреисточников, расположенных, соответственно, в точках $\zeta = -R$ и $\zeta = R$.

В точке $\zeta = -R$, которая соответствует $-\infty$, будем иметь вихреисточник с циркуляцией Γ_1 и расходом Q_1, причем

$$\Gamma_1 + iQ_1 = (U - iV)\, te^{i\beta}. \tag{11}$$

В точке $\zeta = R$, соответствующей $+\infty$, будем иметь вихреисточник с циркуляцией Γ_2 и расходом $-Q_1$, причем

$$\Gamma_2 - iQ_1 = -\left(U - iV + \frac{\Gamma}{t} e^{-i\beta}\right) te^{i\beta} = -(\Gamma_1 + iQ_1) - \Gamma. \tag{12}$$

Поток около цилиндра от этих вихреисточников легко конструируется ([2]), и мы получаем:

$$W(\zeta) = \frac{\Gamma_1 + iQ_1}{2\pi i} \ln\left(\frac{\zeta + R}{\zeta - R}\right) + \frac{\Gamma_1 - iQ_1}{2\pi i} \ln\left(\frac{\zeta - 1/R}{\zeta + 1/R}\right) - \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln\left(\frac{\xi - R}{\zeta - 1/R}\,\zeta\right). \tag{13}$$

Неизвестная пока циркуляция Γ определяется из условия, чтобы точка $\zeta = e^{i\vartheta_0}$, соответствующая задним кромкам профилей, была критической точкой при обтекании круга, т. е. из условия

$$\left.\frac{dW}{d\zeta}\right|_{\zeta = e^{i\vartheta_0}} = 0. \tag{14}$$

Расчет комплексной скорости производим по формуле

$$\overline{V} = \frac{dW}{dz} = \frac{1}{dz/d\zeta}\,\frac{dW}{d\zeta}, \tag{15}$$

привлекая формулы (6), (13) и (14).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
11 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Kawada, Proc. III Intern. Congress for Appl. Mech., 1 (1939). [2] Н. Е. Кочин, Гидродинамическая теория решеток, 1949. [3] С. Г. Нужин, Прикл. матем. и мех., 11, в. 1 (1947).