

Б. Н. РАХМАНОВ

К ТЕОРИИ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 27 XI 1951)

В настоящей заметке рассмотрим следующие классы функций:

1. Класс K_p функций

$$f_p(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + a_{2p+1} z^{2p+1} + \dots$$

однолистных, регулярных в $|z| < 1$ и отображающих круг $|z| < 1$ на выпуклые области плоскости w .

2. Класс S_p функций

$$F_p(z) = z + b_{p+1} z^{p+1} + b_{2p+1} z^{2p+1} + \dots$$

однолистных, регулярных в $|z| < 1$, отображающих круг $|z| < 1$ на звездообразные относительно точки $w = 0$ области.

§ 1. Теорема 1. Если функция

$$F_p(z) = z + b_{p+1} z^{p+1} + b_{2p+1} z^{2p+1} + \dots$$

принадлежит классу S_p , то функция

$$S_{mp+1}(z) = z + b_{p+1} z^{p+1} + b_{2p+1} z^{2p+1} + \dots + b_{mp+1} z^{mp+1},$$

$$p = 3, 4, 5, \quad m \geq 1,$$

однолистка в круге $|z| < \left[\frac{p}{2(p+1)} \right]^{1/p}$ и отображает этот круг на область, звездообразную относительно точки $w = 0$.

Однолистность и звездообразность отрезков $S_{mp+1}(z)$ доказывается одновременно с помощью условия

$$\operatorname{Re} \frac{zF'(z)}{F(z)} \geq 0 \quad \text{при любом } |z| \leq r$$

известным методом (1).

Некоторые трудности представляет случай $m = 2$. Эти трудности удается преодолеть, используя параметрическое представление коэффициентов однолистных симметричных функций (2).

Полученная граница звездообразности и однолистности семейства функций $S_{mp+1}(z)$ точная и не может быть увеличена. Она достигается отрезками функций

$$F_p(z) = \frac{z}{(1-z^p)^{p/2}}$$

Теорема 2. Если функция

$$f_p(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + a_{2p+1} z^{2p+1} + \dots$$

принадлежит классу K_p , то функция

$$S_{mp+1}^*(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + a_{2p+1} z^{2p+1} + \dots + a_{mp+1} z^{mp+1},$$

$$m \geq 1, p = 3, 4, 5,$$

однолистка в круге $|z| < \left[\frac{p}{2(p+1)} \right]^{1/p}$ и отображает $|z| < \left[\frac{p}{2(p+1)} \right]^{1/p}$ на выпуклую область.

Доказательство следует непосредственно из соотношения

$$F_p(z) = z f_p'(z).$$

Теорема 3. Если функция

$$F(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_m z^m + \dots$$

однолистка, регулярна в $|z| < 1$ и отображает круг $|z| < 1$ на звездообразную относительно точки $w = 0$ область, то функция

$$S_{2m-1}(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_m z^m + A_{m+1} z^{m+1} + \dots + A_{2m-1} z^{2m-1}$$

однолистка и звездообразна в $|z| < 1/3$, где

$$A_{m+k} = \sum_{p=1}^{m-k} b_{2k+(2p-1)} b_{2m-(2p-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1,$$

и все $b_3, b_5, \dots, b_{2m-1}$ определяются из системы m уравнений:

$$\sum_{k=1}^m b_{2k-1} b_{2n-(2k-1)} = a_n, \quad n = 1, 2, \dots, m,$$

и $a_1 = 1, b_1 = 1$.

Доказательство основано на рассмотрении функций

$$F_2(z) = [F(z^2)]^{1/2}, \quad P_{2m-1}(z) = [S_{2m-1}(z^2)]^{1/2}$$

и использовании теоремы Корицкого (1).

Константа $1/3$ для данного класса функций не может быть увеличена. Достигается для функции:

$$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

ее отрезком

$$S_3(z) = z(1+z)^2.$$

Теорему можно доказать и для отрезков однолистных, регулярных, выпуклых в $|z| < 1$ функций.

Теорема 4. Если функция $f_1(z) \in K_1$, то любой отрезок степенного ряда функции

$$\Phi_0(z) = 1/2 [f_1(z) + z f_1'(z)]$$

однолистен в круге $|z| < 1/3$.

Доказательство строится на некотором уточнении известного метода и параметрическом представлении коэффициентов.

Оценка радиуса однолиственности $1/3$ — точная. Достигается отрезком

$$S_3(z) = z + 3/2 z^2$$

функции

$$\Phi(z) = \frac{z(2-z)}{2(1-z)^2}.$$

§ 2. Теорема 5. Если функции $f_1(z) \in K_1$ и $F_1(z) \in S_1$ удовлетворяют условию

$$\left| \arg \frac{zf_1'(z)}{F_1(z)} \right| \leq \frac{\pi}{2}, \quad |z| < 1,$$

то функция

$$\Phi_1(z) = 1/2[f_1(z) + F_1(z)]$$

однолистка в $|z| < 1$.

Доказательство следует из геометрических соображений, аналогичных указанным автором в предыдущей работе (3).

Следствия. а) Если $f_1(z) \in K_1$, то функция

$$\varphi(z) = 1/2[z + f_1(z)]$$

однолистка в $|z| < 1$.

б) Если функция

$$F(z) = z + b_3z^3 + b_4z^4 + b_5z^5 + \dots, \quad b_2 = 0,$$

однолистка, регулярна и звездообразна в $|z| < 1$, то функция

$$\psi(z) = 1/2[z + F(z)]$$

однолистка в круге $|z| < 1$.

Справедливость следствия б) вытекает из оценки

$$\left| \arg \frac{F(z)}{z} \right| \leq \frac{\pi}{2} \quad (4).$$

§ 3. Теорема 6. Если функция

$$F_{p,q}(z) = z + b_{p+1}z^{p+1} + b_{2p+1}z^{2p+1} + \dots$$

однолистка, регулярна в $|z| < 1$ и удовлетворяет условию:

$$\left| \arg \frac{zF_{p,q}'(z)}{F_{p,q}(z)} \right| < \frac{\pi}{2}q, \quad 0 < q < 1, \quad |z| < 1,$$

то

$$|F_{p,q}(z)| < e^{\frac{\pi}{p} \operatorname{ctg} \frac{1-q}{2} \pi}.$$

Доказательство непосредственно вытекает из геометрических соображений.

Теорема 7. Если функция

$$F_{p,a}(z) = z + b_{p+1}z^{p+1} + b_{2p+1}z^{2p+1} + \dots$$

регулярна в $|z| < 1$ и удовлетворяет условию:

$$\operatorname{Re} \frac{zF_{p,a}'(z)}{F_{p,a}(z)} > \frac{1-a}{2}, \quad |z| < 1, \quad 0 \leq a \leq 1,$$

и $r_a^{(p)}$ — положительный корень уравнения:

$$(1 - a^2r^{2p})(1 - r^p) - p(1 + a)(1 + r^p) = 0,$$

то радиус выпуклости функции $w = F_{p, a}(z)$

$$R_k^{(a, p)} \geq r_a^{(p)}$$

При $a = 1$

$$R_k^{(1, p)} = \sqrt[p]{p+1 - \sqrt{p^2+2p}} \quad (\text{Голузин}) \quad (5).$$

При $a = 0$

$$R_k^{(0, p)} \geq r_0^p = \sqrt[p]{\frac{2}{\sqrt{p^2+2p+5} + p + 1}}.$$

Доказательство основывается на одной лемме, указанной Г. М. Голузиным.

Саратовский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского

Поступило
23 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. В. Корицкий, Матем. сборн., 36, 2 (1929). ² И. Е. Базилевич, Матем. сборн., 1 (43): 2 (1936). ³ Б. Н. Рахманов, ДАН, 78, № 2 (1951), ⁴ Г. М. Голузин, Матем. сборн., 3 (45): 2 (1938). ⁵ Г. М. Голузин, Матем. сборн., 42, № 2 (1935).