Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 5

МАТЕМАТИКА

Г. Е. ШИЛОВ

ОБ ОДНОРОДНЫХ КОЛЬЦАХ ФУНКЦИЙ НА ТОРЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 XII 1951)

Целью настоящей заметки является описание всех однородных колец функций типа C на торе $T=\{-\pi \leqslant s, t \leqslant \pi\}$, заключенных между кольцом C всех непрерывных функций на торе T и кольцом D_{11} всех функций с непрерывными первыми производными по s и t.

Мы будем пользоваться терминологией и результатами нашей обзорной статьи [1].

1. Согласно [1], § 5.4, каждое из рассматриваемых колец имеет вид $R=K_\omega(T)$, где K — некоторое примарное кольцо, а ω — гомоморфизм, переводящий группу непрерывных характеров тора $\chi_{mn}(s, t) = e^{i(ms+nt)}$ в единичный класс кольца K. При построении непрерывной суммы $K_\omega(T)$ каждому тригонометрическому полиному $P(s, t) = \Sigma a_{mn}\chi_{mn}(s, t)$ приписывается норма по формуле

$$\| P(s,t) \| = \sup_{s,t} \left| \sum a_{mn}\chi_{mn}(s, t)\, \omega(\chi_{mn}) \right| \tag{1}$$

и затем по этой норме производится пополнение.

2. Вначале рассмотрим некоторые примеры.

а) Пусть $K=\{a+bX\}$, где $X^2=0$, $|a+bX|=|a|+|b|$, и пусть гомоморфизм ω определен формулой $\omega(\chi_{mn})=1+imX$. Тогда

$$\| P(s, t) \| = \sup \left| \sum a_{mn}\chi_{mn}(s, t)(1+imX) \right| =$$
$$= \sup \left(\left| \sum a_{mn}\chi_{mn}(s, t) \right| + \left| \sum a_{mn} i m \chi_{mn}(s,t) \right| \right) =$$
$$= \sup \left(|P(s, t)| + \left| \frac{\partial P(s, t)}{\partial s} \right| \right),$$

и при пополнении получается кольцо всех функций $f(s, t)$, непрерывных на торе T и имеющих непрерывную производную по s.

б) Пусть $K=\{a+bX+cY\}$, где $X^2=Y^2=0$, $X-iY=0$, $|a+bX+cY|=|a|+|b-ci|$, и пусть гомоморфизм ω задан формулой $\omega(\chi_{mn})=1+imX+inY$. Тогда

$$\| P(s,t) \| = \sup \left| \sum a_{mn}\chi_{mn}(s, t)(1+imX+inY) \right| =$$
$$= \sup \left(\left| \sum a_{mn}\chi_{mn}(s, t) \right| + \left| \sum a_{mn}(im+n)\chi_{mn}(s, t) \right| \right) =$$
$$= \sup \left(|P(s, t)| + \left| \frac{\partial P}{\partial s} - i\frac{\partial P}{\partial t} \right| \right).$$

Если $u(s, t)$ и $v(s, t)$ суть вещественная и мнимая части полинома $P(s, t)$, то мы получаем далее

$$\| P(s, t) \| = \sup \left(| P(s, t) | + \left| \left(\frac{\partial u}{\partial s} + i \frac{\partial v}{\partial s} \right) - i \left(\frac{\partial u}{\partial t} + i \frac{\partial v}{\partial t} \right) \right| \right) =$$

$$= \sup \left(| P(s, t) | + \left| \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right| \right) =$$

$$= \sup (| P(s, t) | + \sqrt{\operatorname{div}^2 P + \operatorname{rot}^2 P}),$$

где введены обозначения $\operatorname{div} P = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t}$, $\operatorname{rot} P = \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial u}{\partial t}$.

Таким образом, сходимость последовательности $P_n(s, t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ по норме в кольце $K_\omega(T)$ равносильна равномерной сходимости последовательностей $P_n(s, t)$, $\operatorname{div} P_n$, $\operatorname{rot} P_n$. Как показано в нашей заметке ([2]), предельная функция $f(s, t)$ будет векторно-гладкой функцией (на торе T).

Покажем, что построенное нами кольцо $R = K_\omega(T)$ содержит все векторно-гладкие функции на торе T.

Совокупность S всех векторно-гладких функций $w(s, t)$ на торе T является, как следует из ([2]), полным линейным нормированным пространством с нормой $\| w(s, t) \| = \sup \{ | w(s, t) | + | \operatorname{div} w | + | \operatorname{rot} w | \}$.

Эта совокупность, очевидно, инвариантна относительно сдвигов по тору $T (s \to s + \sigma, \quad t \to t + \tau)$; при сдвиге норма каждой функции $w(s, t) \in S$ остается неизменной, а норма разности $w(s + \sigma, t + \tau) - w(s, t)$ стремится к нулю вместе с σ и τ. Поэтому, в силу ([1]), § 2.7, каждая функция $w(s, t) \in S$ является пределом сходящейся (по норме S) последовательности тригонометрических полиномов и, следовательно, входит в R. Итак, $R = K_\omega(T) = S$, что мы и утверждали*.

3. Мы покажем далее, что *построенными в п. 2 примерами исчерпываются (с точностью до локального изоморфизма) все возможные типы однородных колец типа C на торе, содержащихся (строго) между кольцами D_{11} и C.*

Пусть R — некоторое кольцо функций на торе, удовлетворяющее поставленным условиям. В силу общей теоремы (([1]), § 5.4) кольцо R совпадает с непрерывной суммой $K_\omega(T)$, где $K = R / I(0)$ ($I(0)$ есть наименьший примарный идеал, принадлежащий нулевой точке $s = t = 0$), а гомоморфизм ω переводит характер $\chi_{mn}(s, t)$ в его образ в кольце вычетов $R / I(0)$. В силу ([3]), стр. 43—44, кольцо K есть гомоморфный образ кольца вычетов $K_{11} = D_{11} / I(0)$. Известно ([4]), что это последнее кольцо вычетов имеет три измерения, именно, оно состоит из элементов вида $a + bX + cY$, где a, b, c — комплексные числа, $X^2 = Y^2 = XY = 0$.

а) Если K имеет также три измерения, то $K = K_{11} = D_{11} / I(0)$; поэтому, поскольку D_{11} есть кольцо типа C, $K_\omega(T) = D_{11}$.

б) Если K имеет два измерения, то оно есть кольцо вычетов кольца K_{11} по некоторому одномерному идеалу. Всякий одномерный идеал кольца K_{11} порождается некоторым элементом $b_1 X + c_1 Y$. Поэтому K может быть задано как совокупность сумм $a + bX + cY$ с условием, что $b_1 X + c_1 Y$ считается равной нулю; из этого вытекает, что всякий элемент кольца K может быть записан также в виде $a + \left(b - c \frac{b_1}{c_1} \right) X$, если $c_1 \neq 0$, или в виде $a + \left(c - b \frac{c_1}{b_1} \right) Y$, если $b_1 \neq 0$. Поскольку K имеет два измерения, норма в нем с точностью до эквивалентности задается формулами

* Как следствие мы получаем, что *произведение двух векторно-гладких функций представляет собою также векторно-гладкую функцию*. Было бы интересным получить прямое доказательство этого факта.

$$|a+bX+cY|=|a|+\left|b-c\frac{b_1}{c_1}\right| \quad \text{при} \quad c_1 \neq 0,$$

$$|a+bX+cY|=|a|+\left|b-b\frac{c_1}{b_1}\right| \quad \text{при} \quad b_1 \neq 0.$$

Кольцо R теперь можно восстановить, взяв непрерывную сумму колец K по тору T. При этом нужно учесть, что

$$\omega\left(e^{i(ms+nt)}\right)=e^{i(mX+nY)}=1+imX+inY,$$

так как при гомоморфизме $R \to R/I(0)$ функция $e^{i(ms+nt)}$ переходит в элемент $P(s, t)=\Sigma a_{mn}e^{i(ms+nt)}$. Вычисляя норму тригонометрического полинома $P(s, t)=\Sigma a_{mn}e^{i(ms+nt)}$ по формуле (1), мы получаем (считая $c_1 \neq 0$):

$$\|P(s, t)\|=\sup\left|\sum a_{mn}e^{i(ms+nt)}(1+imX+inY)\right|=$$

$$=\sup\left(\left|\sum a_{mn}e^{i(ms+nt)}\right|+\left|\left(im-in\frac{b_1}{c_1}\right)\sum a_{mn}e^{i(ms+nt)}\right|\right)=$$

$$=\sup\left(|P(s, t)|+\left|\frac{\partial P}{\partial s}-\frac{b_1}{c_1}\frac{\partial P}{\partial t}\right|\right).$$

Положим здесь $-\frac{b_1}{c_1}=\alpha+i\beta$ и $P=u+iv$, где α, β, $u(s, t)$ и $v(s, t)$ вещественны. Тогда мы получим, что

$$\|P(s, t)\|=\sup\left(|P(s, t)|+\left|\left(\frac{\partial u}{\partial s}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}-\beta\frac{\partial v}{\partial t}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\left(\frac{\partial v}{\partial s}+\alpha\frac{\partial v}{\partial t}+\beta\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right|\right). \tag{2}$$

Рассмотрим сначала случай $\beta=0$. Норма полинома $P(s, t)$ в этом случае приобретает вид

$$\|P(s, t)\|=\sup\left(|P(s, t)|+\left|\left(\frac{\partial u}{\partial s}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial s}+\alpha\frac{\partial v}{\partial t}\right)\right|\right).$$

Величины $\frac{\partial u}{\partial s}+\alpha\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial v}{\partial s}+\alpha\frac{\partial v}{\partial t}$ пропорциональны частным производным от функций u и v по направлению, образующему угол $\operatorname{arctg}\alpha$ с направлением оси s. Обозначая производную по этому направлению символом $\frac{\partial}{\partial\alpha}$, мы получаем

$$\|P(s, t)\|=\sup\left(|P(s, t)|+\text{const}\left|\frac{\partial P}{\partial\alpha}\right|\right).$$

Сходимость по этой норме означает равномерную сходимость полиномов $P(s, t)$ и их производных $\partial P/\partial\alpha$. После пополнения получается кольцо всех функций на торе T, которые имеют непрерывную производную по направлению α.

К такому же типу кольца приводит и (оставшееся еще нерассмотренным) предположение $c_1=0$.

Пусть теперь $\beta \neq 0$. Введем в окрестности точки s, t новые координаты x, y по формулам

$$s=x, \quad t=\alpha x-\beta y. \tag{3}$$

При этом частные производные преобразуются по следующим правилам:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial s}+\alpha\frac{\partial}{\partial t},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial}{\partial s}+\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial}{\partial t}=-\beta\frac{\partial}{\partial t}.$$

В новых координатах x, y формула (2) приобретает вид

$$\| P \| = \sup\left(| P(s, t) | + \left| \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right|\right)$$

или

$$\| P \| = \sup (| P(s, t) | + \sqrt{\operatorname{div}^2 P + \operatorname{rot}^2 P}), \tag{4}$$

где $\operatorname{div} P$ и $\operatorname{rot} P$ берутся по отношению к координатам x и y.

При пополнении по норме (4) получается кольцо функций, которые в каждой точке тора имеют (непрерывные) дивергенцию и ротор по отношению к локальным координатам x и y.

Очевидно, при $\alpha = 0$, $\beta = -1$ получается уже изученное нами кольцо векторно-гладких функций; во всех прочих случаях кольцо R получается из кольца векторно-гладких функций путем локально-аффинного преобразования координат по формулам (3).

в) Если кольцо K имеет одно измерение, то оно является кольцом вычетов кольца K_{11} по двумерному идеалу. Такой идеал в кольце K_{11} только один и состоит из всех элементов $bX + cY$. Кольцо вычетов по этому идеалу есть тело комплексных чисел; поэтому, в силу ([1]), § 4.2.1, $R = K_\omega(T)$ совпадает с кольцом C.

Тем самым утверждение, сформулированное в начале п. 3, полностью доказано.

Поступило
11 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, 6 : 1 (41) (1951). [2] Г. Е. Шилов, Усп. матем. наук, 6 : 5 (45) (1951). [3] Г. Е. Шилов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, в. 21 (1947). [4] И. Э. Шноль, Матем. сборн., 27 (69) : 2 (1950).