Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 5

МАТЕМАТИКА

С. А. СТЕБАКОВ

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ $\dot{x} = P(x, y), \qquad \dot{y} = Q(x, y)$ ПРИ ПОМОЩИ ИЗОКЛИН

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 XII 1951)

Будем предполагать, что в некоторой области G плоскости (x, y) функции P и Q непрерывны вместе со своими производными по x и y (последнее условие можно было бы несколько ослабить) и подчинены требованию

$$P^2 + Q^2 > 0.$$

Функции P и Q определяют в каждой точке единичный вектор $\mathbf{A}(x, y)$ с компонентами

$$A_x = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2}}, \quad A_y = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}}.$$

Рассмотрим расположенный в области путь (ориентированную кривую)

$$x - \varphi(t), \quad y = \psi(t).$$

Будем предполагать, что функции φ и ψ непрерывны и имеют всюду определенные правые производные $D_d\varphi$ и $D_d\psi$, подчиненные условию

$$(D_d\varphi)^2 + (D_d\psi)^2 > 0.$$

Тогда направление пути «после» точки, соответствующей данному значению аргумента t, характеризуется единичным вектором $\vec{\chi}(t)$ с компонентами

$$\chi_x = \frac{D_d\varphi}{\sqrt{(D_d\varphi)^2 + (D_d\psi)^2}}, \quad \chi_y = \frac{D_d\psi}{\sqrt{(D_d\varphi)^2 + (D_d\psi)^2}}$$

Будем называть путь п р а в ы м, если во всех его точках угол $\measuredangle \mathbf{A}\vec{\chi}$ подчинен неравенствам

$$-\pi < \measuredangle \mathbf{A}\vec{\chi} \leqslant 0,$$

и л е в ы м, если во всех его точках

$$0 \leqslant \measuredangle \mathbf{A}\vec{\chi} < \pi.$$

Траектории системы

$$\dot{x} = P(x, y),$$
$$\dot{y} = Q(x, y) \tag{1}$$

характеризуются тем, что они являются путями одновременно и правыми и левыми.

Легко видеть, что правые и левые пути в достаточно малой окрестности любого значения параметра t являются простыми жордановыми дугами, что позволяет в обычном смысле говорить относительно них о пересечении одного пути другим «слева направо» и «справа налево».

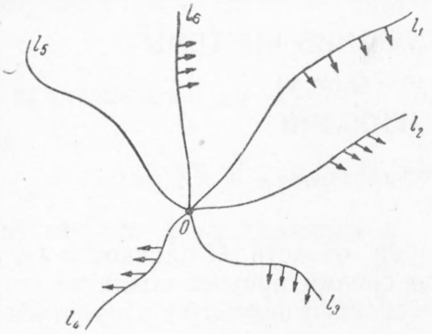

Рис. 1

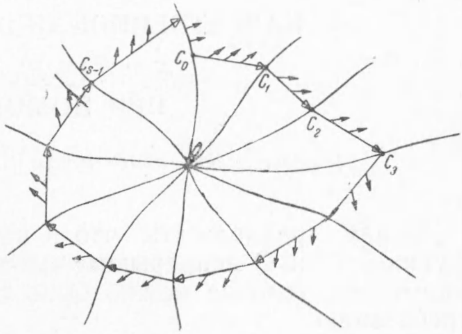

Рис. 2

Легко доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Траектории системы* (1) *могут пересекать правые пути только справа налево, а левые пути только слева направо.*

Дадим теперь способ построения правых и левых путей, который может иметь значительные практические приложения. Пусть выбраны единичные векторы

$$\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_k = \mathbf{B}_0,$$

направления которых меняются в циклическом порядке:

$$\measuredangle \mathbf{B}_{i-1} \mathbf{B}_i < \pi.$$

Множество точек, где

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}_i,$$

будем называть изоклиной I_i. Сумму этих множеств обозначим I. Пусть I^* обозначает множество точек, где $P = Q = 0$. Множество $I + I^*$ разбивает свое дополнение до полной области G на открытые множества

$$G_1, G_2, \ldots, G_k,$$

где множество G_i удовлетворяет требованию

$$|\measuredangle \mathbf{B}_{i-1} \mathbf{A} < \measuredangle \mathbf{B}_{i-1} \mathbf{B}_i|. \tag{2}$$

Будем называть ориентированный отрезок S правоканоническим, если его концы лежат на I, а все внутренние точки принадлежат одному и тому же множеству G_i, причем направление его совпадает с $\mathbf{B}_{i-1}$. Ориентированный отрезок будем называть левоканоническим, если его концы лежат на I, все внутренние точки принадлежат одному и тому же G_i, а направление совпадает с $\mathbf{B}_i$. Полигональный путь, составленный из правоканонических отрезков, будем называть правоканоническим, а составленный из левоканонических отрезков — левоканоническим.

Очевидна следующая теорема:

Теорема 2. *Право (лево) канонические полигональные пути являются правыми (левыми) путями.*

Хорошо известно значение правых и левых замкнутых путей при изучении особых точек и замкнутых траекторий. Очевидно, что замкнутая траектория не может пересекать ни замкнутых правых, ни замкнутых левых путей (так как после пересечения их в одном направлении она должна была бы пересечь их и в противоположном направлении). Замкнутые пути без самопересечений, как известно, делят плоскость на две области: область, расположенную справа от пути, и область, расположенную слева от пути. Если путь правый, то траектории, попавшие в левую область, не могут из нее выйти, если же путь левый, то же самое справедливо для правой области.

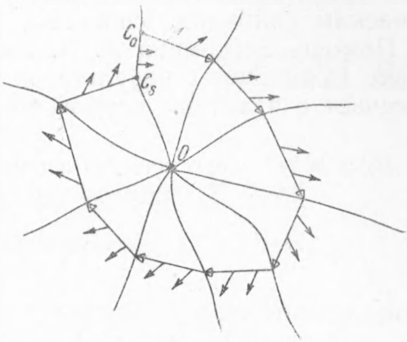

Рис. 3

Рассмотрим случай, когда

а) область G является окрестностью изолированной особой точки O;

б) изоклины l_i состоят из компонент, являющихся простыми дугами

$$l_0, l_1, \ldots, l_{s-1}, l_s = l_0,$$

выходящими из точки O (будем считать их занумерованными в циклическом порядке, как изображено на рис. 1);

в) все дуги l_i пересекаются траекториями слева направо (см. рис. 1).

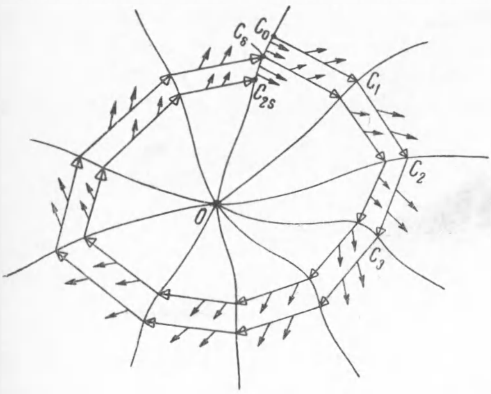

Рис. 4

В указанном случае правоканонический спиральный путь $C_0, C_1, \ldots, C_s$, изображенный на рис. 2, вместе с замыкающим его отрезком C_sC_0 дуги l_0 будет правым замкнутым путем.

Если правоканоническая спираль $C_0, C_1, \ldots, C_s$ окажется закручивающейся, как изображено на рис. 3, то замыкание ее отрезком C_sC_0 дуги l_0 не приводит к какому-либо определенному результату. В этом случае следует образовать еще один виток правоканонической спирали (см. рис. 4). Если обозначить через S замкнутый путь

$$C_0C_1 \ldots C_{s-1}C_sC_{s+1} \ldots C_{2s}C_sC_0,$$

через U — компоненту точки O в дополнении к S до всей плоскости и через V — компоненту бесконечно удаленной точки в том же дополнении, то имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если существует траектория, переходящая из V в U, то не существует траектории, переходящей из U в V.*

Из теоремы 3 вытекает, в частности, что не может существовать замкнутой траектории, соединяющей точки из U с точками из V.

Мы видим, таким образом, что не только закручивающиеся правоканонические спирали, но и двойные раскручивающиеся правоканонические спирали являются своего рода барьерами. Разница заключается только в том, что закручивающиеся спирали приводят к определенному выводу о невозможности вхождения траекторий во внутреннюю область, двойные же раскручивающиеся спирали лишь к выводу о невозможности одновременного существования входящих и выходящих траекторий. Аналогичные утверждения, относящиеся к левоканоническим спиралям, очевидны.

Помощь академика А. Н. Колмогорова в окончательной формулировке изложенных результатов была исключительно велика, что автор отмечает с чувством глубочайшей признательности.

Московский энергетический институт
им. В. М. Молотова

Поступило
25 VIII 1951