Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. М. ЛЕВИТАН

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ Г. ВЕЙЛЯ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 15 XII 1951)

1. Рассмотрим уравнение

$$Ly + \lambda y = y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \tag{1}$$

где $q(x)$ — суммируемая в каждом конечном интервале функция. Обозначим через α произвольное действительное число, через $\varphi_\alpha(x, \lambda)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi_\alpha(0, \lambda) = \cos\alpha$, $\varphi'_\alpha(0, \lambda) = \sin\alpha$, и через $\theta_\alpha(x, \lambda)$ — решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $\theta_\alpha(0, \lambda) = -\sin\alpha$, $\theta'_\alpha(0, \lambda) = \cos\alpha$.

Недавно мы предложили [1,2] новый метод доказательства теоремы разложения по собственным функциям уравнения (1).

Другие доказательства [3,4] теоремы разложения существенно опираются на фундаментальную теорему Г. Вейля.

Теорема Г. Вейля. *Для каждого недействительного* $\lambda = z = x + iy$ $(y \neq 0)$ *уравнение* (1) *имеет по крайней мере одно решение с интегрируемым квадратом в интервале* $(0, \infty)$.

Цель настоящей заметки — показать, что теорема Г. Вейля следует из теоремы разложения. Поскольку наше доказательство теоремы разложения не опирается на теорему Г. Вейля, то мы, стало быть, даем новое доказательство теоремы Г. Вейля.

2. Пусть $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ $(0 \leqslant x \leqslant \infty)$ последовательность функций, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $f_n(x) \geqslant 0$; 2) $f_n(x) = 0$ для $x \geqslant 1/n$; 3) $f_n(0) = f'_n(0) = 0$; 4) $f''_n(x)$ непрерывны и 5) $\int\limits_0^\infty f_n(x)\,dx = 1$. Положим

$$E_n(\lambda) = \int\limits_0^\infty f_n(x)\varphi_\alpha(x, \lambda)\,dx; \quad \psi_n(x, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_\alpha(x, \lambda)\, E_n(\lambda)\, d\rho_\alpha(\lambda)}{z - \lambda}. \tag{2}$$

Покажем, что интеграл, определяющий функцию $\psi_n(x, z)$, а также интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda\varphi_\alpha(x, \lambda)\, E_n(\lambda)\, d\rho_\alpha(\lambda)}{z - \lambda} \tag{3}$$

сходятся абсолютно и равномерно в каждом конечном интервале. В силу тождества Грина

$$E_n(\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty \varphi_\alpha(x, \lambda)\, Lf_n(x)\,dx = -\frac{1}{\lambda} G_n(\lambda).$$

Поэтому интеграл (3) сводится к интегралу $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_\alpha(x, \lambda) G_n(\lambda) d\rho_\alpha(\lambda)}{z-\lambda}$, имеющему тот же вид, что и интеграл (2). Следовательно, можно ограничиться изучением последнего интеграла. Из формулы [5] $\varphi_\alpha(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\, x + \int\limits_0^x K(x, t) \cos\sqrt{\lambda}\, t\, dt$ следует, что для $\lambda \geqslant 0$ и x в конечном интервале $|\varphi_\alpha(x, \lambda)| = O(1)$. Для $\lambda \to -\infty$ $|\varphi_\alpha(x, \lambda)| = O(e^{\sqrt{|\lambda|}x})$. Поэтому $|E_n(\lambda)| = O(1)$ для $\lambda \geqslant 0$ и $E_n(\lambda) = O\left(e^{\sqrt{|\lambda|}\frac{1}{n}}\right)$ для $\lambda \to -\infty$. Абсолютная и равномерная (в каждом конечном интервале) сходимость интеграла (2) следует из оценки [6] $\rho_\alpha = O(\sqrt{\lambda})$ для $\lambda \to +\infty$ и результата В. А. Марченко [7]: для всех $x > 0$ $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}} d\rho_\alpha(\lambda) < \infty$.

Применяя оператор L под знаком интеграла (2), что возможно в силу равномерной сходимости интеграла (3), мы получим

$$L\psi_n(x, z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{-\lambda\varphi_\alpha(x, \lambda) E_n(\lambda) d\rho_\alpha(\lambda)}{z-\lambda} =$$

$$= -z\psi_n(x, z) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_\alpha(x, \lambda) E_n(\lambda) d\rho_\alpha(\lambda).$$

Из 2), 3) и 4) следует, что при $\lambda \to +\infty$ $E_n(\lambda) = O(1/\lambda)$. Поэтому из указанных ранее оценок для $\varphi_\alpha(x, \lambda)$ и $\rho_\alpha(\lambda)$ следует, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_\alpha(x, \lambda) E_n(\lambda) d\rho_\alpha(\lambda)$ сходится абсолютно и равномерно в каждом конечном интервале и, значит, в силу теоремы разложения, равен $f_n(x)$. Таким образом, $L\psi_n(x, z) = -z\psi_n(x, z) + f_n(x)$, и, значит, для $x \geqslant 1/n$

$$L\psi_n(x, z) = -z\psi_n(x, z). \tag{4}$$

Если мы докажем, что $\psi_n(x, z) \in L_2(0, \infty)$, то получим теорему Г. Вейля.

Лемма. *Существует не зависящая от n постоянная величина C так, что*

$$\int\limits_0^{\infty} |\psi_n(x, z)|^2 dx < C.$$

Для доказательства леммы рассмотрим вспомогательную задачу Штурма — Лиувилля в конечном интервале $(0, b)$ [1] и положим

$$\psi_n(x, z; b) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_\alpha(x, \lambda) E_n(\lambda)}{z-\lambda} d\rho_{\alpha, b}(\lambda).$$

Покажем, что при каждом фиксированном n и $b \to \infty$ $\psi_n(x, z; b) \to \psi_n(x, z)$, и притом равномерно в каждом конечном интервале. Для этого достаточно показать, что если x заключается в конечном интервале, то равномерно по b

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_N^{\infty} \frac{\varphi_\alpha(x, \lambda) E\ \ (\lambda)}{z-\lambda} d\rho_{\alpha, b}(\lambda) = 0, \tag{5}$$

$$\lim_{N\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{-N} \frac{\varphi_\alpha(x,\lambda) E_n(\lambda)}{z-\lambda} d\rho_{\alpha, b}(\lambda) = 0. \tag{5'}$$

В силу неравенства Коши — Буняковского

$$\left| \int\limits_N^\infty \frac{\varphi_\alpha(x,\lambda) E_n(\lambda)}{z-\lambda} d\rho_{\alpha, b}(\lambda) \right| \leqslant \left(\int\limits_N^\infty \frac{\varphi_\alpha^2(x,\lambda)}{|z-\lambda|^2} d\rho_{\alpha, b}(\lambda) \right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\infty}^\infty E_n^2(\lambda)\, d\rho_{\alpha, b}(\lambda) \right)^{1/2}. \tag{6}$$

Так как $\rho_{\alpha, b}(\lambda) < C\sqrt{\lambda}$, причем, как легко усмотреть из доказательства [6], C от b не зависит, то (5) следует непосредственно из (6) и равенства Парсеваля. Аналогично доказывается равенство (5′).

В силу ортогональности имеем

$$\int\limits_0^b |\psi_n(x,z;b)|^2\, dx = \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{E_n^2(\lambda)}{|z-\lambda|^2} d\rho_{\alpha, b}(\lambda).$$

Обозначим через a фиксированное число $< b$. Из предыдущего равенства следует

$$\int\limits_0^a |\psi_n(x,z;b)|^2\, dx \leqslant \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{E_n^2(\lambda)}{|z-\lambda|^2} d\rho_{\alpha, b}(\lambda).$$

Полагая при фиксированном a $b\to\infty$, мы получим

$$\int\limits_0^a |\psi_n(x,z)|^2\, dx \leqslant \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{E_n^2(\lambda)}{|z-\lambda|^2} d\rho_\alpha(\lambda),$$

и так как число a произвольно, то лемма доказана.

3. Из использованных ранее оценок для $\varphi_\alpha(x,\lambda)$ и $\rho_\alpha(\lambda)$ легко следует, что равномерно в каждом конечном интервале

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(x,z) = \cos\alpha \int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\varphi_\alpha(x,\lambda)\, d\rho_\alpha(\lambda)}{z-\lambda} = \psi(x,z). \tag{7}$$

Так как для $x \geqslant 1/n$ $L\psi_n(x,z) = -z\psi_n(x,z)$, то последовательность функций $\psi_n''(x,z)$ также сходится равномерно в каждом конечном интервале (a,b) $(0<a<b<\infty)$ к функции $\{q(x)-z\}\psi(x,z)$. Отсюда следует, что функция $\psi(x,z)$ имеет непрерывную вторую производную и удовлетворяет уравнению $L\psi(x,z) + z\psi(x,z) = 0$. В самом деле, пусть $g(x,z) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n''(x,z)$. В силу равномерной сходимости $(a>0)$

$$\int\limits_a^x dt \int\limits_a^t g(s,z)\, ds = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^x dt \int\limits_a^t \psi_n''(s,z)\, ds =$$
$$= \psi(x,z) - \psi(a,z) + (x-a) \lim_{n\to\infty} \psi_n'(a,z).$$

Из этого равенства следует существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n'(a,z)$, а также равенство $\psi''(x,z) = g(x,z) = \lim\limits_{n\to\infty} \psi_n''(x,z)$. Переходя в равенстве

$L\psi_n(x, z) + z\psi_n(x, z) = 0$ к пределу, полагая $n \to \infty$, мы получим уравнение

$$L\psi(x, z) + z\psi(x, z) = 0$$

Из леммы легко следует, что $\psi(x, z) \in L_2(0, \infty)$.

Найдем $\psi(0, z)$ и $\psi'(0, z)$. Полагая в равенстве (7) $x = 0$, мы получим

$$\psi(0, z) = \cos^2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\rho_\alpha(\lambda)}{z - \lambda} = \cos^2\alpha \cdot m_\alpha(z). \tag{8}$$

Непосредственно дифференцировать равенство (7) нельзя, так как получается расходящийся интеграл. Для того чтобы определить $\psi'(0, z)$, мы поступим следующим образом. Проинтегрируем равенство

$$\psi_n''(x, z) = \{q(x) - z\}\psi_n(x, z) + f_n(x)$$

в пределах от 0 до $x > 1/n$. Мы получим, в силу (5),

$$\psi_n'(x, z) - \psi_n'(0, z) = \int_0^x \{q(x) - z\}\psi_n(x, z)\,dx + 1. \tag{9}$$

Так как при фиксированном n

$$\psi_n'(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi_\alpha'(x, \lambda)\, E_n(\lambda)\, d\rho_\alpha(\lambda)}{z - \lambda},$$

то при $x = 0$ получим

$$\psi_n'(0, z) = \sin\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_n(\lambda)\, d\rho_\alpha(\lambda)}{z - \lambda}.$$

Следовательно, равенство (9) принимает вид

$$\psi_n'(x, z) = \int_0^x \{q(x) - z\}\psi_n(x, z)dx + 1 + \sin\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E_n(\lambda)\, d\rho_\alpha(\lambda)}{z - \lambda}. \tag{9'}$$

Легко видеть, что для $x \geqslant 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n'(x, z) = \psi'(x, z)$. Поэтому, полагая в равенстве (9') $n \to \infty$, мы получим

$$\psi'(x, z) = \int_0^x \{q(x) - z\}\psi(x, z)\,dx + 1 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot m_\alpha(z).$$

Полагая в последнем равенстве $x = 0$, получим

$$\psi'(0, z) = 1 + \sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot m_\alpha(z). \tag{10}$$

Из начальных условий (8) и (10) легко получить формулу

$$\psi(x, z) = \{\cos\alpha \cdot m_\alpha(z) + \sin\alpha\}\varphi(x, z) + \cos\alpha \cdot \theta(x, z).$$

В заключение отметим, что случай $\cos\alpha = 0$ разбирается аналогично.

Поступило
24 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям . . . , 1950. [2] Б. М. Левитан, ДАН, 73, № 4 (1950). [3] H. Weyl, Math. Ann., 68 (1910). [4] E. C. Titchmarch, Eigenfunctions Expansions, Oxford, 1946. [5] Б. М. Левитан, Усп. матем. наук, 1 (29) (1949). [6] Б. М. Левитан, ДАН, 71, № 4 (1950). [7] В. А. Марченко, ДАН, 74, № 4 (1950).