Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. Г. КРЕЙН

ОБ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 XII 1951)

В продолжение наших предыдущих исследований ([1,2]) здесь будет проведен ряд новых (в некотором смысле окончательных) результатов по обратной задаче для струны.

1. Пусть S — струна, натянутая единичной силой вдоль оси X от $x=0$ до $x=1$, и пусть ее правый конец закреплен неподвижно. Что касается левого конца струны S, то мы будем рассматривать два случая:

1) конец $x=0$ может свободно скользить вдоль оси Y;
2) конец $x=0$ закреплен неподвижно.

В первом случае струну S мы будем обозначать через S_1, во втором случае — через S_2.

Обозначим через $\sigma(x)$ $(0<x\leqslant 1;\ \sigma(0)=0)$ массу открытого справа отрезка $(0, x]$ струны S. Таким образом, $\sigma(x)=\sigma(x-0)$ $(0<x\leqslant 1)$. Величина $M=\sigma(1)>0$ будет, очевидно, массой всей струны S (мы предполагаем, что неподвижный конец не несет сосредоточенной массы).

Струна S_2 называется с и м м е т р и ч н о й, если на ней массы расположены симметрично относительно ее середины, т. е.

$$\sigma(x)-\sigma(+0)=\sigma(1)-\sigma(1-x)\quad (0<x<1).$$

Пусть $p_n=\sqrt{\lambda_n}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — последовательные частоты свободных гармонических колебаний струны S_2.

Как уже нами отмечалось (([2]), теорема 1),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\lambda_n}}=\frac{1}{\pi}\int_0^1\sqrt{\sigma'(x)}\,dx.$$

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы возрастающая последовательность положительных чисел $\{\sqrt{\lambda_n}\}_0^\infty$ была спектром частот некоторой струны S_2, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел отношения $n/\sqrt{\lambda_n}$ и чтобы*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2\,|D'(\lambda_n)|}<\infty.$$

При выполнении этих условий найдется единственная симметричная струна S_2 с данным спектром $\{\sqrt{\lambda_n}\}_0^\infty$.

Эта симметричная струна из всех струн S_2 с данным спектром $\{\sqrt{\lambda_n}\}_0^\infty$ имеет наименьшую массу.

Заметим, что из соотношений (1), (2) и (3), которые приводятся ниже, могут быть легко получены правила вычисления этой наименьшей массы через числа λ_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

При доказательстве единственности симметричной струны с данным спектром нам пришлось воспользоваться сильными средствами, в частности, теорией ([3]) целых эрмитовых операторов с индексом дефекта (1, 1).

2. Пусть $\sqrt{\mu_0} < \sqrt{\mu_1} < \sqrt{\mu_2} < \cdots$ — спектр частот некоторой струны S_1 с распределением масс $\sigma(x)$, а $\sqrt{\lambda_0} < \sqrt{\lambda_1} < \sqrt{\lambda_2} < \ldots$ — спектр частот струны S_2, получающейся из S_1 путем неподвижного закрепления ее левого конца. Тогда $\mu_0 < \lambda_0 < \mu_1 < \lambda_1 < \cdots$ и

$$D(\lambda) / D_1(\lambda) = \prod_0^\infty \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) \bigg/ \prod_0^\infty \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_n}\right) = \gamma + \sum_{n=0}^\infty \frac{\rho_n}{\mu_n - \lambda}. \tag{1}$$

Величина γ положительна в том и только в том случае, когда некоторая окрестность $(0, d]$ левого конца струны S_1 свободна от масс ($\sigma(x) = 0$ при $0 \leqslant x \leqslant d$), при этом γ есть максимальная длина такой окрестности: $\gamma = \max d$.

Величина

$$m = 1 \bigg/ \sum_{n=0}^\infty \rho_n \tag{2}$$

дает массу, сосредоточенную в точке $x = \gamma$ струны S_1, т. е. $m = \sigma(\gamma + 0) - \sigma(\gamma)$.

Заметим также, что полная масса M струны S_1 может быть вычислена по формуле*

$$M = -\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\mu_n^2 D(\mu_n) D_1'(\mu_n)}. \tag{3}$$

Функция $R(\lambda) = D(\lambda) / D_1(\lambda)$ имеет простой механический смысл. Если к концу $x = 0$ струны S_1 приложить сосредоточенную пульсирующую силу $F = A \sin \sqrt{\lambda}\, t$, то вынужденные колебания конца $x = 0$ будут задаваться уравнением $y = R(\lambda) A \sin \sqrt{\lambda}\, t$. Поэтому функция $R(\lambda)$ называется коэффициентом динамической податливости ([4]).

Утверждение об единственности симметричной струны с данным спектром эквивалентно предложению:

Теорема 2. *Распределение масс на струне S_1 вполне определяется заданием ее коэффициента динамической податливости $R(\lambda)$.*

Теорема 3. *Для того чтобы возрастающая последовательность положительных чисел $\{\sqrt{\mu_n}\}_0^\infty$ была спектром частот некоторой струны S_1, необходимо и достаточно, чтобы существовал конечный предел*

$$T = \pi \lim_{n \to \infty} (n / \sqrt{\mu_n}) \tag{4}$$

* Формулу (3) мы получили еще в ([2]), однако при формулировке смысла M допустили неточность.

и чтобы

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^{3/2} \left| D_1'(\mu_n) \right|} < \infty \quad \left(D_1(\lambda) = \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_n} \right) \right).$$

При выполнении этих условий среди струн S_1, имеющих данный спектр $\{\sqrt{\mu_n}\}_0^\infty$, найдется одна и только одна струна с наименьшей массой. Коэффициент динамической податливости $R(\lambda)$ струны минимальной массы имеет выражение:

$$R(\lambda) = h^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^{1/2} \left| D_1'(\mu_n) \right| (\mu_n - \lambda)},$$

при этом сама минимальная масса равна h^2.

3. С коэффициентом динамической податливости $R(\lambda)$ струны S_1, имеющим разложение (1), тесно связана переходная функция

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho_n}{\mu_n} (1 - \cos \sqrt{\mu_n}\, t), \tag{5}$$

которая задает смещение левого конца струны S_1, вызванное действием за время t постоянной единичной силы, внезапно приложенной к левому концу первоначально покоившейся струны.

Условимся говорить, что струна S имеет тяжелый правый конец, если для любого $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon < 1)$ в интервале $(1 - \varepsilon, 1)$ найдется множество положительной меры, на котором существует положительная производная $\sigma'(x)$.

Заметим, что величина T в (4) есть время пробега волны по струне S_1 от левого конца к правому.

Теорема 4. *Распределение масс на струне S_1 с тяжелым правым концом вполне определяется значениями ее переходной функции $\Phi(t)$ в интервале $(0, 2T)$, где T — время пробега волны по S_1.*

Заметим, что для любой струны S_1 с „легким“ правым концом теорема не верна. Однако распределение масс на такой струне S_1 будет вполне определяться значениями функции $\Phi(t)$ в любом интервале $(0, a)$, где $a > 2T$.

Обозначим через P_a $(0 < a \leqslant \infty)$ совокупность непрерывных четных функций $F(t)$ $(|t| < a)$, которым соответствует положительно-определенное ядро $F(s - t)$ $(0 \leqslant s, t < a)$. Через $\tilde{P}_a$ $(0 < a < \infty)$ обозначим совокупность тех функций из P_a, которые неоднозначно продолжаются в функции из P_∞.

Теорема 5. *Пусть $\Phi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2T)$ — некоторая непрерывная функция. Для того чтобы она была переходной функцией некоторой струны S_1 с тяжелым правым концом и временем пробега T, необходимо и достаточно, чтобы при любом $C > 1$ функция $F(t) = C - \Phi(|t|)$ $(-2T < t < 2T)$ принадлежала классу $\tilde{P}_{2T}$.*

Класс функций $\Phi(t)$, удовлетворяющих последнему условию, уже служил предметом наших исследований ([5]). Этому классу функций, например, принадлежит всякая непрерывная неубывающая выпуклая кверху функция $\Phi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2T;\ \Phi(0) = 0)$, значения которой < 1.

Теорема 6. *Если функция $\Phi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2T;\ \Phi(0) = 0)$ обладает абсолютно непрерывной производной и $\Phi'(0) > 0$, то она будет переходной функцией некоторой струны S_1 в том и только том случае, когда:*

1) $1 - \Phi(t) \in P_{2T}$ *и*

2) *интегральное уравнение*

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^{2T} \{\Phi'(s)\Phi'(t) + \Phi''(|s-t|)\}\varphi(t)\,dt \qquad (6)$$

при $\lambda = {}^1/_2\,\Phi'(0)$ *либо вовсе не имеет нетривиальных решений, либо всякое его нетривиальное решение неортогонально к функции* $\Phi'(t)$.

При выполнении указанных условий функция распределения масс $\sigma(x)$ *струны* S_1 *с данной переходной функцией* $\Phi(t)$ *будет иметь абсолютно непрерывную производную, не равную тождественно нулю ни на каком подинтервале интервала* (0, 1).

Заметим, что условие $1 - \Phi(t) \in P_{2T}$ эквивалентно тому, что положительные характеристические числа уравнения (5) все не меньше ${}^1/_2\,\Phi'(0)$.

Это условие заведомо будет выполнено, если функция $\Phi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2T)$ сразу будет задана в виде (5), где $\rho_n, \mu_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и $\sum_0^\infty (\rho_n / \mu_n) \leqslant 1$.

На важную роль переходной функции в обратных краевых задачах мы указали еще в [1,2]. После этого ею весьма успешно воспользовались для изучения обратной краевой задачи И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан [6].

Поступило
23 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, ДАН, **76**, № 1 (1951). [2] М. Г. Крейн, ДАН, **76**, № 3 (1951). [3] М. Г. Крейн, ДАН, **44**, № 5 (1944). [4] Ф. М. Дименберг, Статья в сборн. Динамика и прочность коленчатых валов, АН СССР, 1948. [5] М. Г. Крейн, ДАН, **45**, № 3 и № 4 (1944). [6] И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., **15**, № 4 (1951).