Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 5

МАТЕМАТИКА

М. М. ДЖРБАШЯН

О РАЗЛОЖЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННЫЙ РЯД ТЕЙЛОРА

(Представлено академиком М. В. Келдышем 14 XII 1951)

Вопрос о полноте системы аналитических функций вида $\{z^n f^{(n)}(\alpha, z)\}$ в круге конечного радиуса, когда $f(z)$ — целая функция первого порядка и нормального типа, рассматривался различными авторами. В настоящей заметке нами приводится одна специальная система такого рода и указывается достаточное условие, при котором она составляет базис для представления определенных классов аналитических функций. При этом специальная структура этой системы позволяет построить соответствующую биортогональную систему и тем самым определить коэффициенты разложения.

Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ — произвольная последовательность комплексных чисел, $\{Q_p(z)\}$ — соответствующие полиномы Абеля — Гончарова:

$$Q_0(z) \equiv 1, \quad Q_p(z) = \int\limits_{\alpha_0}^{z} dz_1 \int\limits_{\alpha_1}^{z_1} dz_2 \ldots \int\limits_{\alpha_{p-1}}^{z_{p-1}} dz_p \quad (p = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

удовлетворяющие условиям:

$$Q_p^{(k)}(\alpha_k) = \varepsilon_{pk} = \begin{cases} 1 & \text{при } k = p, \\ 0 & \text{при } k \neq p. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть, далее,

$$E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\sigma)^{2n/\rho}}{\Gamma(1 + 2n/\rho)} z^n \tag{3}$$

целая функция Миттаг-Леффлера порядка $\rho/2$ и типа 2σ.

Теорема. *Если последовательность $\{\alpha_k\}$ удовлетворяет условию*

$$\lim_{k\to\infty} \sup k^{1-1/\rho} |\alpha_k| < \frac{\log 2}{(\sigma\rho)^{1/\rho}}, \tag{4}$$

то любая целая функция $f(z)$ порядка ρ и типа, меньшего σ, единственным образом разлагается в ряд вида

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m E^{(m)}(\overline{\alpha}_m z), \tag{5}$$

равномерно сходящийся во всякой замкнутой части плоскости z; при этом

$$c_m = \frac{\sigma\rho}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^\rho} f(re^{i\vartheta})\, \overline{Q_m(re^{i\vartheta})}\, r^{\rho-1}\, dr\, d\vartheta. \qquad (6)$$

Приведем леммы, необходимые для доказательства этой теоремы.

Лемма 1. *Системы функций*

$$\{Q_p(z)\}, \quad \{z^k E^k(\overline{\alpha}_k z)\}$$

биортогональны в следующем смысле:

$$\frac{\sigma\rho}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^\rho} Q_p(z)\, \overline{\{z^k E^{(k)}(\overline{\alpha}_k z)\}}\, r^{\rho-1}\, dr\, d\vartheta = \varepsilon_{pk} \quad (z = re^{i\vartheta}). \qquad (7)$$

Доказательство. Известно ([1]), что для всякой целой функции $f(z)$ порядка ρ и типа, меньшего σ, имеет место интегральное представление вида

$$f(z) = \frac{\sigma\rho}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^\rho} f(re^{i\vartheta})\, E(zre^{-i\vartheta})\, r^{\rho-1}\, dr\, d\vartheta \qquad (8)$$

при $|z| < \infty$. Заметив теперь, что всякий полином $Q_p(z)$, очевидно, представим интегралом (6), берем от обеих частей производную порядка k

$$Q_p^{(k)}(z) = \frac{\sigma\rho}{\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-2\sigma r^\rho} Q_p(re^{i\vartheta})\, (re^{-i\vartheta})^k\, E^{(k)}(zre^{-i\vartheta})\, r^{\rho-1}\, dr\, d\vartheta.$$

Имея в виду свойство (2) полиномов $Q_p(z)$, отсюда получаем формулу (7).

Лемма 2. *Если*

$$\limsup_{k\to\infty} k^{1-1/\rho} |\alpha_k| < \frac{\log 2}{(\sigma\rho)^{1/\rho}}, \qquad (4')$$

то при некотором $d_1 > d = (\sigma\rho e)^{1/\rho} e^{-1}$ бесконечная система линейных уравнений

$$c_n + \sum_{k=1}^n c_{n-k} \frac{\alpha_{n-k}^k}{k!} = \frac{A_n}{(d_1 n^{1-1/\rho})^n} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad (9)$$

где $\sup\{|A_n|\} < +\infty$, имеет единственное решение $\{c_k\}$, удовлетворяющее условию

$$\limsup_{k\to\infty} (d_1 k^{1-1/\rho})^k |c_k| < +\infty. \qquad (10)$$

Доказательство. Обозначая $z_k = c_k (d_1 k^{1-1/\rho})^k$, приведем систему (9) к виду

$$z_n + \sum_{k=1}^n z_{n-k} \frac{(d_1 \alpha_{n-k})^k}{k!} \left[\frac{n}{(n-k)^{n-k}}\right]^{1-1/\rho} = A_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \qquad (11)$$

Свободные члены системы (11) ограничены, следовательно, для существования у нее единственного ограниченного решения и, тем самым, единственного решения $\{c_k\}$ у системы (9) со свойством (10) достаточно, чтобы она была вполне регулярной. Но из особой структуры системы (11) легко следует, что для ее вполне регулярности достаточно при некотором $d_1 > d$ иметь

$$J(d_1) = \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(d_1 |\alpha_{n-k}|)^k}{k!} \left[\frac{n^n}{(n-k)^{n-k}} \right]^{1-1/\rho} < 1. \tag{12}$$

Но из условия (4′) следует, что при некотором $\sigma_1 > \sigma$

$$\limsup_{k\to\infty} k^{1-1/\rho} |\alpha_k| = c < \frac{\log 2}{(\sigma_1\rho)^{1/\rho}}; \tag{13}$$

выберем $d_1 = (\sigma_1 \rho e)^{1/\rho} e^{-1}$. С другой стороны, из (4′) следует, что при любом $n \geqslant 1$ и k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, будем иметь

$$(n-k)^{1-1/\rho} |\alpha_{n-k}| < A, \tag{14}$$

где A — константа, не зависящая от n и k.

Из (13) и (14) имеем

$$J(d_1) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(d_1 c e^{1-1/\rho})^k}{k!} + \limsup_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{n-1} \frac{A^k}{k!} \left(\frac{n}{n-k} \right)^{n(1-1/\rho)}. \tag{15}$$

Но второе слагаемое справа в (15) равно нулю при всяком $\rho > 0$. Это очевидно, если $0 < \rho \leqslant 1$; если же $\rho > 1$, то достаточно заметить, что $n^n / (n-k)^n < 2ek^{k+1}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, и опять приходим к тому же заключению. Таким образом $J(d_1) = \leqslant e^{d_1 c e^{1-1/\rho}} - 1 < e^{\log 2} - 1 = 1$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы. Пусть $f(z)$ — произвольная целая функция порядка ρ и типа, меньшего σ. Пусть $d_1 > d$ имеет тот же смысл, что и в лемме 2, и $d_2 = d^2 d_1^{-1} < d$.

Из известной связи, существующей между ростом целой функции и порядком ее коэффициентов Тейлора, легко следует, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{(d_2 n^{1-1/\rho})^n}{n!} z^n, \tag{16}$$

где $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$. Далее, из определения (3) функции $E(z)$ следует, что

$$E(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k \frac{(ed^2 k^{1-2/\rho})^k}{k!} z^k, \tag{17}$$

где $y_k = O(k^{-1/2})$.

Обозначая $A_n = x_n y_n^{-1}$, имеем $\sup\{|A_n|\} < +\infty$, и по лемме 2 бесконечная система линейных уравнений

$$x_n \frac{(d_2 n^{1-1/\rho})^n}{n!} = y_n \left\{ c_n \alpha_n^0 + c_{n-1} \frac{\alpha_{n-1}}{1!} + \ldots + c_0 \frac{\alpha_0^n}{n!} \right\} (ed^2 n^{1-2/\rho})^n$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{18}$$

имеет единственное решение $\{c_n\}$ со свойством (10).

Оценим теперь выражение $c_m E^{(m)}(\overline{\alpha_m} z)$ при условии (4), когда $m \to \infty$. При $m \geqslant m_0$, по (13), имеем:

$$|c_m E^{(m)}(\overline{\alpha}_m z)| \leqslant \frac{O(1)}{(d_1 m^{1-1/\rho})^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ed^2(m+k)^{1-2/\rho})^{m+k}}{k!} |\alpha_m|^k |z|^k <$$

$$< O(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[d_2 \left(\frac{m+k}{m}\right)^{1-1/\rho}\right]^{m+k} e^m \frac{(e^{1/\rho} \log 2 \cdot |z|)^k}{(m+k)^{(m+k)/\rho}}. \tag{19}$$

Отсюда при $0 < \rho \leqslant 1$ и $m \geqslant m_0$ следует:

$$|c_m E^{(m)}(\overline{\alpha}_m z)| < O(1) \left(\frac{d_2 e}{m^{1/\rho}}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{1/\rho} d_2 \log 2 \cdot |z|)^k}{k!\, k^{k/\rho}} =$$

$$= O\left(e^{A_1 |z|^{\frac{\rho}{1+\rho}}}\right) \left(\frac{d_2 e}{m^{1/\rho}}\right)^m, \tag{20}$$

где A_1 — константа.

Если же $\rho > 1$, то, замечая, что $1 + \frac{k}{m} < e^{k/m}$, и, следовательно,

$$\left(\frac{m+k}{m}\right)^{m+k} < e^{k+1} k^k,$$

будем иметь:

$$|c_m E^{(m)}(\overline{\alpha}_m z)| \leqslant O(1) \left(\frac{d_2 e}{m^{1/\rho}}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B|z|)^k}{k^{2k/\rho}} =$$

$$= O(e^{B_1 |z|^{\rho/2}}) \left(\frac{d_2 e}{m^{1/\rho}}\right)^m, \tag{21}$$

где B и B_1 — константы.

Из оценок (20) и (21) следует, что двойной ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m E^m(\overline{\alpha}_m z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m \sum_{k=0}^{\infty} y_{m+k} \frac{(ed^2(m+k)^{1-2/\rho})^{m+k}}{k!} \alpha_m^k z^k$$

абсолютно и равномерно сходится во всякой замкнутой части плоскости z. Располагая члены ряда по возрастающим степеням z и имея в виду (18), получим разложение

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m E^{(m)}(\overline{\alpha}_m z), \tag{22}$$

равномерно сходящееся во всякой замкнутой части плоскости z.

Наконец, из тех же оценок (20) и (21), в силу того, что $d_2 < d = (\sigma\rho e)^{1/\rho} e^{-1}$, получим после простых оценок, что ряд (22) можно почленно интегрировать на всей плоскости при наличии веса $e^{-2\sigma r^\rho} r^{\rho-1}$ после умножения на всякий полином $Q_p(z)$.

Из этого замечания и в силу (7) получим формулы (6) для определения коэффициентов $\{c_m\}$ разложения (22).

Сектор математики
Академии наук Арм.ССР

Поступило
10 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Джрбашян, Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН Арм.ССР (1948).