Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 5

МАТЕМАТИКА

Действительный член Академии наук УССР Б. В. ГНЕДЕНКО

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ О МАКСИМАЛЬНОМ РАСХОЖДЕНИИ МЕЖДУ ДВУМЯ ЭМПИРИЧЕСКИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Настоящая заметка примыкает к работам ([1, 2]), в которых были даны уточнения известного результата Н. В. Смирнова ([3]); в ней излагаются два следствия из указанных уточнений.

Пусть имеются две серии результатов независимых испытаний, как внутри каждой серии, так и между сериями,

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n;\quad y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n,$$

произведенные над случайными величинами с одной и той же непрерывной функцией распределения $F(x)$. Введем обозначения

$$F_1(x) = \frac{k_1(x)}{n},\qquad F_2(x) = \frac{k_2(x)}{n},$$

где $k_1(x)$ — число x_n, меньших, чем x, а $k_2(x)$ — число y_k, меньших, чем x. Положим далее

$$\alpha = [x\sqrt{2n}],\quad \beta = [y\sqrt{2n}],$$

$$D_n^- = -\min_{-\infty<x<\infty}\{F_1(x) - F_2(x)\} = \max_{-\infty<x<\infty}\{F_2(x) - F_1(x)\},$$

$$D_n^+ = \max_{-\infty<x<\infty}\{F_1(x) - F_2(x)\},\quad D_n = \max\{D_n^-,\ D_n^+\}.$$

В работах ([1, 2]) были найдены функции распределения величин D_n^+, D_n, а также совместное распределение величин D_n^- и D_n^+. Кроме того, были доказаны следующие предельные теоремы: при $n \to \infty$

$$\Phi_n^+(x) = P\left\{\sqrt{\frac{n}{2}}\,D_n^+ < x\right\} \to 1 - e^{-2x^2}\qquad (x > 0),$$

$$\Phi_n(x) = P\left\{\sqrt{\frac{n}{2}}\,D_n < x\right\} \to K(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-2k^2x^2}\qquad (x > 0),$$

$$\Phi_n(x, y) = P\left\{\sqrt{\frac{n}{2}}\,D_n^- < x,\quad \sqrt{\frac{n}{2}}\,D_n^+ < y\right\} \to S(x, y) =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2k^2(x+y)^2} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-2(kx+(k-1)y)^2} + e^{-2(ky+(k-1)x)^2}\right]\qquad (x > 0,\quad y > 0).$$

Заметим, что случайные величины D_n^+, D_n^-, D_n могут принимать только значения вида α / n, где $\alpha = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Знание функций $\Phi_n^+(x)$, $\Phi_n(x)$, $\Phi_n(x, y)$ позволяет получить более точные результаты, а именно:

Теорема 1. *Равномерно относительно x и y ($0 \leqslant x < \infty$, $0 \leqslant y < \infty$) выполняются соотношения: при $n \to \infty$*

$$\sqrt{2n}\, P\left\{D_n^+ = \frac{\alpha}{n}\right\} - 4xe^{-2x^2} \to 0,$$

$$\sqrt{2n}\, P\left\{D_n = \frac{\alpha}{n}\right\} - \frac{d}{dx} K(x) \to 0,$$

$$2nP\left\{D_n^- = \frac{\alpha}{n},\ D_n^+ = \frac{\beta}{n}\right\} - \frac{\partial^2 S(x, y)}{\partial x\, \partial y} \to 0.$$

Здесь, как было указано, $\alpha = [x\sqrt{2n}]$ и $\beta = [y\sqrt{2n}]$.

Доказательство только что сформулированной локальной теоремы следует пути, намеченному в ([1]) при выводе предельной теоремы, и использует следующие предельные соотношения (напоминаем снова, что $\alpha = [x\sqrt{2n}]$ и $\beta = [y\sqrt{2n}]$):

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n}\left[1 - \frac{C_{2n}^{n-s(\alpha+1)}}{C_{2n}^{n-s\alpha}}\right] = 4s^2x;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{C_{2n}^{n-s(\alpha+\beta)}}\left[C_{2n}^{n-s(\alpha+\beta)} - 2C_{2n}^{n-s(\alpha+\beta+1)} + C_{2n}^{n-s(\alpha+\beta+2)}\right] = -4s^2 + 16s^4(x+y)^2;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{C_{2n}^{n-s(\alpha+\beta)}}\left[C_{2n}^{n-s(\alpha+\beta)} - C_{2n}^{n-(s-1)\alpha - s\beta - (s-1)} - \right.$$

$$\left. - C_{2n}^{n-(s-1)\alpha - s\beta - s} + C_{2n}^{n-(s-1)\alpha - s\beta - (2s-1)}\right] =$$

$$= -4s(s-1) + 16s(s-1)\left[(s-1)x + sy\right]^2.$$

Отметим интересное соотношение, существующее между вероятностями $P\left\{D_n^+ < \frac{\alpha}{n}\right\}$ и $P\left\{D_n^+ = \frac{\alpha}{n}\right\}$:

$$P\left\{D_n^+ < \frac{\alpha}{n}\right\} = 1 - \frac{n+\alpha+1}{2\alpha+1} P\left\{D_n^+ = \frac{\alpha}{n}\right\}.$$

Следующая теорема дает представление о быстроте сходимости функций распределения $\Phi_n^+(x)$, $\Phi_n(x)$, $\Phi_n(x, y)$ к предельным. Для формулировки теоремы нам нужно ввести в рассмотрение функцию $Q(x)$:

$$Q(x+1) = Q(x), \quad Q(x) = x \quad (0 \leqslant x < 1)$$

(дробная часть числа x).

Теорема 2. *Имеют место следующие равенства:*

$$\Phi_n^+(x) = 1 - e^{-2x^2}\left[1 + \frac{4xQ(x\sqrt{2n})}{\sqrt{2n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{x^2}{n}\left\{1 - \frac{2x^2}{3} + 4Q^2(x\sqrt{2n})\right\} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \quad (x \geqslant 0);$$

$$\Phi_n(x) = K(x) + \frac{4x}{\sqrt{2n}} Q(x\sqrt{2n}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k k^2 e^{-2k^2x^2} +$$

$$+ \frac{x^2}{n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k k^2 \left[1 - \frac{2k^2x^2}{3} + 4k^2Q^2(x\sqrt{2n})\right] e^{-2k^2x^2} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (x > 0);$$

$$\Phi_n(x, y) = S(x, y) + \frac{4}{\sqrt{2n}} \Bigg[(x+y) Q((x+y)\sqrt{2n}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 e^{-2k^2(x+y)^2} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} ((k-1)x + ky)((k-1) Q(x\sqrt{2n}) + kQ(y\sqrt{2n})) e^{-2((k-1)x+ky)^2} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} (kx + (k-1)y) (kQ(x\sqrt{2n}) + (k-1) Q(y\sqrt{2n})) e^{-2(kx+(k-1)y)^2} \Bigg] +$$

$$+ \frac{1}{n} \Bigg[(x+y)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} k^2 \left[1 - \frac{2k^2}{3}(x+y)^2 + 4k^2Q^2((x+y)\sqrt{2n})\right] e^{-2k^2(x+y)^2} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} ((k-1)x + ky) \Big[1 - \frac{2}{3}((k-1)x + ky)^2 + ((k-1) Q(x\sqrt{2n}) +$$

$$+ kQ(y\sqrt{2n}))^2\Big] e^{-2((k-1)x+ky)^2} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} (kx + (k-1)y)\Big[1 - \frac{2}{3}(kx + (k-1)y)^2 + (kQ(x\sqrt{2n}) +$$

$$+ (k-1) Q(y\sqrt{2n}))^2\Big[e^{-2(kx+(k-1)y)^2}\Big] + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
13 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Гнеденко и В. С. Королюк, ДАН, 80, № 4 (1951). [2] Б. В. Гнеденко и Е. Л. Рвачева, ДАН, 82, № 4 (1952). [3] Н. В. Смирнов, Бюлл. МГУ, 2, в. 2 (1939).