

УДК 519.67 + 621.01

## СПОСОБ ВИЗУАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ МАШИН С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦ ОДНОРОДНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

А.В. Котов<sup>1,2</sup>, Д.Г. Кроль<sup>2</sup>

<sup>1</sup>ОАО «Сейсмотехника», г. Гомель, Республика Беларусь

<sup>2</sup>Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого, г. Гомель, Республика Беларусь

**Введение.** Разработка математической модели любого плоского рычажного механизма непосредственно связана с проведением его кинематического анализа. Результаты такого анализа можно представить в виде массива числовых данных или в виде различных графических зависимостей. Но даже этих параметров часто бывает недостаточно, для оперативной оценки правильности полученного решения 1-ой задачи кинематического анализа, и тем более проверки 2-ой и 3-ей задачи.

Традиционно оценка адекватности полученных результатов кинематического анализа для математической модели плоского рычажного механизма проводится графическими методами для нескольких произвольных положений входного звена. Сопоставляя полученные графические данные из планов положений, скоростей и ускорений с их расчетными значениями, делается вывод об адекватности разработанной математической модели. Однако, такой способ является достаточно трудоемким и обладает относительно невысокой точностью, даже с учетом возможности применения различных графических пакетов [1].

На сегодняшний день подавляющее большинство математических моделей плоских рычажных механизмов разрабатывается при помощи современных математических пакетов или языков программирования. Данные компьютерные средства имеют достаточно широкий набор инструментов для визуализации графической информации, однако их потенциал применяется далеко не всегда. Потому разработка универсального способа визуализации результатов кинематического анализа для плоских рычажных механизмов является достаточно актуальной научно-практической задачей, решение которой позволит существенно ускорить разработку и отладку соответствующих математических моделей.

**Цель исследования.** Предложить универсальный способ визуализации решения кинематических задач для плоских рычажных механизмов с помощью матриц однородного преобразования координат и его реализацию в математическом пакете PTC.MathCAD.

**Постановка задачи.** Большинство известных способов графической визуализации решения кинематической задачи для плоских рычажных механизмов ограничиваются отображением лишь звеньев механизма в виде набора прямых линий [2]. Это в некотором роде облегчает восприятие смоделированной кинематической схемы механизма, но все еще не дает полной информации об его кинематике. Для проведения более полной визуализации решения кинематической задачи, как правило, требуются определенные навыки программирования с учетом специфики того или иного программного продукта, что не всегда является доступным.

При этом в компьютерной графике для визуализации различных графических объектов, как на плоскости, так и в пространстве активно используются матрицы однородного преобразования координат [3]. Возможность применения данных матриц в математических пакетах или языках программирования открывает дополнительные возможности по визуализации решения кинематических задач для плоских рычажных механизмов.

**Методы исследований.** Для осуществления визуализации графических объектов математической модели рычажного механизма на плоскости  $XU$  с помощью матриц однородного преобразования координат, вначале составляется базовая матрица исходного объекта, состоящая из координат его точек-вершин. Особенностью данной матрицы является то, что порядок расположения вершин должен соответствовать непрерывному обходу контура графического объекта, а третья координата всегда равна единице. Затем сформированная базовая матрица графического объекта, в зависимости от его положения и роли в математической модели, последовательно умножается на соответствующие матрицы однородного преобразования размером  $3 \times 3$  (матрицу параллельного переноса, поворота, масштабирования и др.). В общем виде математическую запись указанных действий для произвольного графического объекта можно записать как:

$$P = \underbrace{\begin{pmatrix} scale & 0 & 0 \\ 0 & scale & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{масштаб}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & r_x \\ 0 & 1 & r_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{перенос}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{поворот}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}}_{\text{и др.}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_i \\ y_1 & y_2 & \dots & y_i \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{\text{базовая матрица}},$$

где  $scale$  – масштабный фактор для осей  $X$  и  $U$  принятой системы координат;  $r_x, r_y$  – проекции радиус-вектора точки, в которую необходимо переместить графический объект;  $\alpha$  – угол поворота графического объекта на плоскости относительно начала системы координат, рад;  $x_i, y_i$  – координаты  $i$ -ой точки-вершины базовой матрицы исходного объекта.

**Результаты и обсуждение.** Несмотря на то, что большинство рычажных механизмов сельскохозяйственных машин представляют собой пространственную конструкцию, для их исследования (с учетом ряда допущений) применимы плоские расчетные схемы. Поэтому предложенный

способ визуализации может быть успешно использован для указанных механизмов при разработке соответствующих математических моделей.

В рамках данной работы не представляется возможным показать все особенности визуализации решения кинематической задачи для плоского рычажного механизма с помощью матриц однородного преобразования координат. Поэтому ограничимся лишь несколькими примерами: графической визуализацией на кинематической схеме плоского рычажного механизма направляющих векторов, а также буквенных обозначений шарниров звеньев. На рис. 1 приведены примеры исходных графических объектов для такой визуализации на кинематической схеме, а на рис. 2 показано применение матриц однородного преобразования координат в составе пользовательских функций математического пакета PTC.MathCAD для их визуализации.

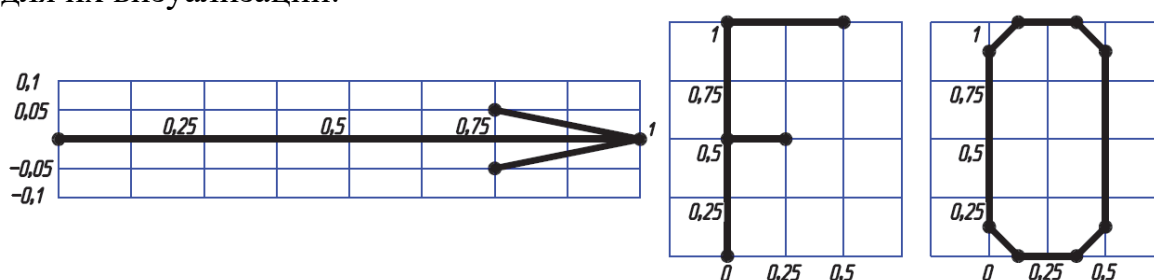


Рис. 1 – Исходные объекты для визуализации на кинематической схеме

$$\begin{aligned}
 \text{Arrow}(r, v, \text{scale}) := & \left. \begin{array}{l} P \leftarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0.75 & 1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 0.05 & 0 & -0.05 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{STR} \leftarrow \begin{pmatrix} \text{scale} & 0 & r_X \\ 0 & \text{scale} & r_Y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_X & -v_Y & 0 \\ v_Y & v_X & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (\text{STR} \cdot P)^T \end{array} \right| \\
 & \text{a)} \\
 \text{Letter}(r, \text{letter}, \text{scale}) := & \left. \begin{array}{l} P \leftarrow \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{if letter = "F"} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.125 & 0.375 & 0.5 & 0.5 & 0.375 & 0.125 & 0 \\ 0.125 & 0.875 & 1 & 1 & 0.875 & 0.125 & 0 & 0 & 0.125 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{if letter = "O"} \end{cases} \\ \text{STR} \leftarrow \begin{pmatrix} \text{scale} & 0 & r_X + 0.5 \cdot \text{scale} \\ 0 & \text{scale} & r_Y - 1.2 \cdot \text{scale} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ (\text{STR} \cdot P)^T \end{array} \right| \\
 & \text{б)}
 \end{aligned}$$

Рис. 2 – Пользовательские функции для визуализации направляющего вектора (а) и буквенных обозначений (б) в PTC.MathCAD

Пользовательские функции содержат следующие входные параметры:  $r$  – радиус-вектор точки, в которой требуется разместить для визуализации графический объект;  $v$  – вектор, который требуется визуализировать в виде направляющего вектора с учетом его модуля и направления;  $scale$  – масштабный фактор;  $letter$  – требуемая для визуализации буква латинского алфавита.

Предложенный способ визуализации предполагает, что заранее уже выполнен кинематический анализ плоского рычажного механизма одним из известных методов [4]. Тогда с помощью представленных пользовательских функций для графической визуализации на кинематической схеме требуемых объектов (например, аналога вектора линейной скорости точки  $F$ , а также ее буквенного обозначения), необходимо составить нижеприведенные выражения и поместить их по соответствующим осям  $X$  и  $Y$  декартового графика в математическом пакете PTC.MathCAD:

$$Arr(s, XY) = Arrow(\bar{F}(s), \bar{v}_{qF}(s), 150)^{<XY>} ; Let(s, XY) = Letter(\bar{F}(s), "F", 100)^{<XY>} ,$$

где  $XY$  – параметр, отвечающий за вывод отдельного столбца массива, содержащего координаты точек по осям  $X$  или  $Y$ ;  $s$  – обобщенная координата.

По аналогии с приведенными на рис. 2 пользовательскими функциями может быть осуществлена визуализация других статических и динамических объектов кинематической схемы плоского рычажного механизма (пружин, гидроцилиндров, неподвижных опор, буквенно-цифрового обозначения и др.). На рис. 3 представлен пример графической визуализации для математической модели механизма агрегатирования самоходной уборочной косилки с помощью таких пользовательских функций, сформированных на основе матриц однородного преобразования координат. На рисунке представлено положение механизма агрегатирования при движении вниз навешиваемого адаптера в процессе копирования рельефа поля с визуализацией аналогов векторов скоростей для всех характерных точек.

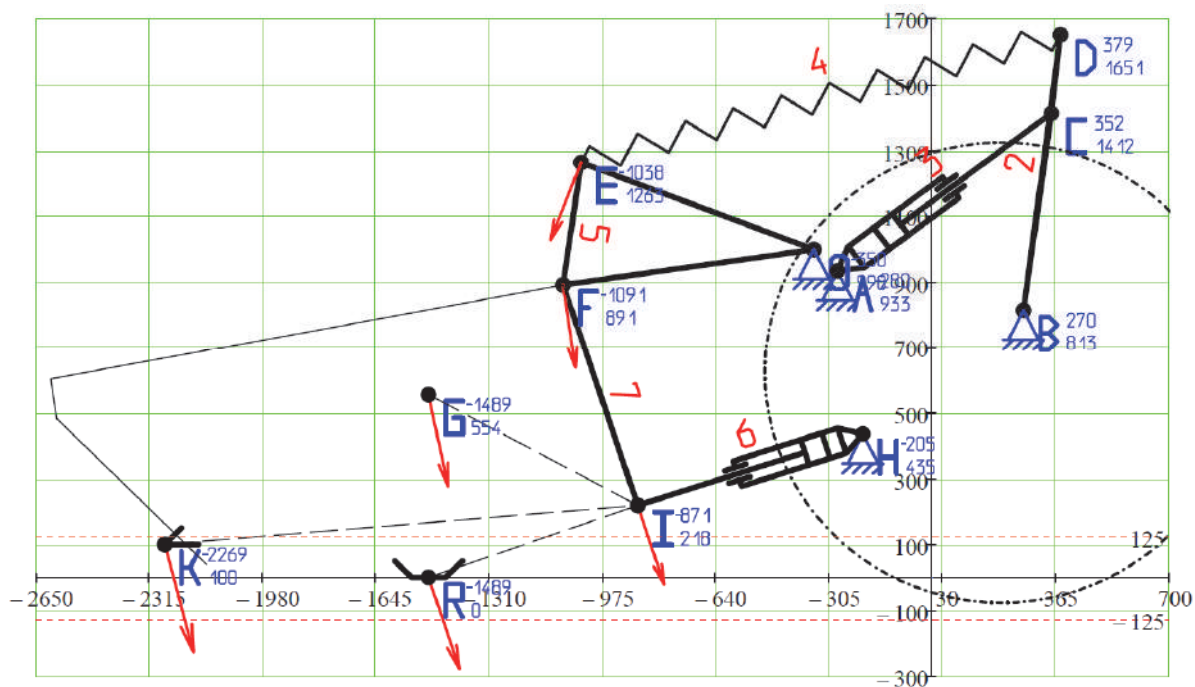


Рис. 3 – Графическая визуализация решения кинематической задачи для математической модели механизма агрегатирования самоходной уборочной косилки в математическом пакете PTC.MathCAD

Для визуализации на кинематической схеме звеньев рассматриваемого плоского рычажного механизма, все найденные радиус-векторы характерных точек объединены в один массив, порядок записи которых соответствует непрерывному графическому обходу контура механизма [5]. В результате такой визуализации решения кинематической задачи для любого положения плоского рычажного механизма можно всегда контролировать тот или иной интересующий кинематический параметр, а дополнительные возможности математического пакета PTC.MathCAD позволяют создавать соответствующие анимационные ролики [6].

**Выводы.** Предложенный способ визуализации решения кинематических задач для плоских рычажных механизмов с помощью матриц однородного преобразования координат позволяет обеспечить точное и наглядное представление результатов анализа и может быть реализован в большинстве математических пакетах и языках программирования с учетом специфики их работы с матрицами и графическими объектами. Данный способ позволяет уже на ранних стадиях математического моделирования контролировать полученное решение кинематического анализа. Предложенные в данной работе математические выражения не являются окончательными и могут в дальнейшем совершенствоваться. Возможным направлением дальнейших исследований может стать адаптация предложенного способа к другим математическим пакетам или языкам программирования.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Жуков, И. А. К вопросу о кинематической разрешимости плоских рычажных диадных механизмов / И. А. Жуков, Е. В. Жукова // Журнал передовых исследований в области естествознания. – 2019. – № 6. – С. 20-28.
2. Сердега, Ю. П. Исследование и визуализация многозвенных механизмов с применением компьютерных технологий / Ю. П. Сердега, В. А. Волохов // Наука ЮУрГУ : Материалы 67-й научной конференции, Челябинск, 14–17 апреля 2015 года / ЮУрГУ, 2015. – С. 1585-1595.
3. Куликов, А. И. Алгоритмические основы современной компьютерной графики : учебное пособие / А. И. Куликов, Т. Э. Овчинникова. – 2-е изд. – Москва : ИНТУИТ, 2016. – 230 с.
4. Котов, А. В. Анализ уравновешенности кривошипно-ползунного механизма привода режущего аппарата методом векторов главных точек / А. В. Котов // Тракторы и сельхозмашины. - 2024. - Т. 91, № 2. - С. 167-180. DOI: <https://doi.org/10.17816/0321-4443-606653>.
5. Дворжак, В.М. Візуалізація схемотехнічного моделювання механізмів технологічних машин / В.М. Дворжак, Д.Л. Литвяк, І.С. Мелашенко [та ін.] // Технології та дизайн. – 2018. – № 4 (29). – С. 1-9.
6. Котов, А.В. Визуализация решения кинематической задачи для механизмов сельхозмашин в пакете PTC.MathCAD [Видео]. – Режим доступа: <https://www.youtube.com/watch?v=IBvSB78Pe74>. – Дата доступа: 10.10.2025.