Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 3

МАТЕМАТИКА

И. П. НАТАНСОН

О ПРИБЛИЖЕНИИ К МНОГОКРАТНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ПЕРИОДИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ ПРИ ПОМОЩИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 24 XI 1951)

Пусть $\Phi_n(t)$ — положительная, четная, 2π-периодическая функция, для которой $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t)\,dt = 1$ и $\delta_n = \int\limits_{0}^{\pi} t\,\Phi_n(t)\,dt \to 0$. Положим

$$U_n[f;x] = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\Phi_n(t-x)\,dt. \tag{1}$$

Известно (1), что для любой 2π-периодической функции $f(t)$

$$|U_n[f;x] - f(x)| \leqslant 3\omega(\delta_n), \tag{2}$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(t)$.

Допустим теперь, что у функции $\Phi_n(t)$ существует непрерывная производная. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть*

$$U_n^{[0]}[f;x] = f(x), \quad U_n^{[k]}[f;x] = U_n[U_n^{[k-1]};x].$$

Если у $f(t)$ существует непрерывная производная порядка p с модулем непрерывности $\omega_p(\delta)$, то

$$\left|\sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k C_{p+1}^k\, U_n^{[k]}[f;x]\right| \leqslant 3^{p+1}\,\delta_n^p\,\omega_p(\delta_n). \tag{3}$$

В самом деле, если у $f(t)$ существует непрерывная первая производная $f'(t)$ с модулем непрерывности $\omega_1(\delta)$, то

$$U_n^{[k]}[f';x] = \{U_n^{[k]}[f;x]\}'_x. \tag{4}$$

Если, кроме того, $|f'(t)| \leqslant A$, то из (2) вытекает, что

$$|U_n[f;x] - f(x)| \leqslant 3A\delta_n. \tag{5}$$

Применяя неравенство (2) к $f'(t)$, получим, в силу (4), что

$$|\{U_n[f;x] - f(x)\}'_x| \leqslant 3\omega_1(\delta_n).$$

Отсюда, на основании (5), следует, что

$$| U_n \{U_n [f; t] - f; x\} - \{U_n [f; x] - f(x)\} | \leqslant 9 \delta_n \omega_1 (\delta_n),$$

или

$$| U_n^{[2]} [f; x] - 2U_n^{[1]} [f; x] + f(x) | \leqslant 9\delta_n \omega_1 (\delta_n). \qquad (6)$$

Если существует $f''(t)$ с модулем непрерывности $\omega_2(\delta)$, то можно применить (6) к $f'(t)$. Это дает, что

$$| \{U_n^{[2]} - 2U_n^{[1]} + f\}'_x | \leqslant 9\delta_n \omega_2 (\delta_n)$$

и, на основании (5), мы получаем

$$| U_n^{[3]} - 3U_n^{[2]} + 3U_n^{[1]} - f | \leqslant 27\, \delta_n^2 \omega_2 (\delta_n).$$

Повторное применение этого приема и приводит к (3).

Замечания. 1. Практически удобно применять теорему тогда, когда

$$\Phi_n(t) = L^{(n)} + \sum_{i=1}^{m(n)} l_i \cos it.$$

В этом случае

$$U_n [f; x] = \rho_0{}^{(n)} A + \sum_{i=1}^{m(n)} \rho_i^{(n)} (a_i \cos ix + b_i \sin ix),$$

где A, a_i, b_i — коэффициенты Фурье функции $f(t)$, и построение интегралов $U_n^{[k]} [f; x]$ сводится к простому умножению этих коэффициентов на степени $[\rho_i^{(n)}]^k$.

2. Если применить нашу теорему к интегралу Джексона, в котором

$$\Phi_n(t) = \frac{3}{2\pi n (2n^2 + 1)} \left(\frac{\sin \dfrac{nt}{2}}{\sin \dfrac{t}{2}} \right)^4,$$

то легко получить известные теоремы этого автора о наилучшем приближении многократно дифференцируемых периодических функций тригонометрическими многочленами.

Полученные результаты переносятся в теорию приближения функций нескольких аргументов. Именно, пусть $\Phi_n(t)$ и $\Psi_m(v)$ — две положительные, четные, 2π-периодические функции, имеющие непрерывные производные, причем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)\, du = \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_m(v)\, dv = 1.$$

Соотнесем каждой непрерывной и 2π-периодической по обоим аргументам функции $f(u, v)$ сингулярный интеграл

$$U_{n, m} [f; x, y] = \iint_R f(u, v)\, \Phi_n (u - x)\, \Psi_m (v - y)\, du\, dv,$$

где $R=[-\pi\leqslant u\leqslant\pi;\ -\pi\leqslant v\leqslant\pi]$. Если положить, как и выше

$$U_{n,m}^{[0]}[f;x,y]=f(x,y),\quad U_{n,m}^{[k]}[f;x,y]=U_{n,m}[U_{n,m}^{[k-1]};x,y]$$

и ввести обозначения

$$\lambda_n=\int_0^\pi u\,\Phi_n(u)\,du,\quad \mu_m=\int_0^\pi v\Psi_m(v)\,dv,$$

то рассуждениями, сходными с приведенными, доказывается теорема 2.

Теорема 2. *Если у $f(u,v)$ существуют непрерывные частные производные до порядка p включительно, причем модуль непрерывности $\frac{\partial^p f(u,v)}{\partial u^k\partial v^{p-k}}$ есть $\omega_{k,p-k}(\lambda,\mu)$, то*

$$\left|\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k C_{p+1}^k U_{n,m}^{[k]}[f;x,y]\right|\leqslant 5^{p+1}\sum_{k=0}^{p}C_p^k\lambda_n^k\mu_m^{p-k}\omega_{k,p-k}(\lambda_n,\mu_m).$$

Если, в частности, у $f(u,v)$ существуют все частные производные до порядка $p+1$ включительно и все производные $(p+1)$-го порядка ограничены числом A, то правую часть последнего неравенства можно заменить на $5^{p+1}A(\lambda_n+\mu_m)^{p+1}$.

Применением этой теоремы к двойному интегралу Джексона доказывается теорема 3*.

Теорема 3. *Если $f(x,y)$ — 2π-периодическая по каждому из аргументов функция, имеющая непрерывные частные производные до порядка p включительно, а $E_{n,m}$ есть ее наилучшее приближение тригонометрическими многочленами порядка не выше n по x и не выше m по y, то*

$$E_{n,m}\leqslant 22^{p+1}\sum_{k=0}^{p}C_p^k\frac{1}{n^k m^{p-k}}\omega_{k,p-k}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right).$$

Если, в частности, у $f(x,y)$ существуют все частные производные порядка $p+1$ и они ограничены числом A, то **

$$E_{n,m}\leqslant 22^{p+1}A\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)^{p+1}.$$

Поступило
15 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Натансон, ДАН, 73, № 2, 273 (1950). [2] С. Н. Бернштейн, ДАН, 59, № 8, 1379 (1948).

* Здесь придется еще использовать то обстоятельство, что двойной интеграл Джексона отклоняется от $f(x,y)$ не больше, чем на $11\,\omega\left(\frac{1}{n},\frac{1}{m}\right)$.

** Это последнее утверждение вытекает также и из результатов С. Н. Бернштейна ([2]).