Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 3

МАТЕМАТИКА

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

РАСЩЕПЛЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ, ДЕЙСТВУЮЩИХ ИЗ ПРОСТРАНСТВА L^q В ПРОСТРАНСТВО L^p

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 XI 1951)

Из спектральной теории эрмитовых операторов (см., например, [1]) вытекает возможность построения в пространстве L^2 корня $A^{1/2}$ из действующего в L^2 положительного эрмитова оператора A. Оператор A представим тогда в виде

$$A = A^{1/2} \cdot A^{1/2}.$$

Естественным обобщением последнего равенства является представление операторов A, действующих из пространства L^q в пространство L^p, в виде

$$A = HH^*, \tag{1}$$

где H и H^* — сопряженные операторы. В настоящей статье мы получим такие представления для некоторых операторов, определенных в L^q.

Задача, рассматриваемая в статье, возникла в связи с одной работой Голомба [2].

1. Пусть q_0 — некоторое фиксированное число, $1 < q_0 \leqslant 2$. Пусть A — аддитивный и однородный оператор, определенный на функциях, заданных на множестве G конечной или бесконечной меры, суммируемых на G с одной из степеней q, где $1 < q_0 \leqslant q \leqslant 2$. Мы будем ниже предполагать, что оператор A обладает следующими свойствами:

α) Оператор A преобразует каждую функцию из L^q в функцию из соответствующего $L^p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\quad q_0 \leqslant q \leqslant 2\right)$.

β) Оператор A, рассматриваемый как оператор, действующий из L^q в $L^p \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ q_0 \leqslant q \leqslant 2\right)$, непрерывен.

γ) Оператор A, рассматриваемый в L^2, эрмитов и положителен.

Примером оператора A, удовлетворяющего условиям α), β), γ), может служить линейный интегральный оператор

$$A\varphi(s) = \int_G K(s, t)\, \varphi(t)\, dt \tag{2}$$

с симметричным положительно определенным ядром $K(s, t)$, удовлетворяющим условиям

$$\int\limits_G\int\limits_G K^2(s,t)\,ds\,dt < \infty, \quad \int\limits_G\int\limits_G |K(s,t)|^{p_0}\,ds\,dt < \infty, \tag{3}$$

где $\frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}=1$. Условия (3) при этом независимы в случае $\operatorname{mes} G=\infty$, а в случае $\operatorname{mes} G<\infty$ первое из неравенств (3) следует из второго.

Теорема 1. *Пусть оператор A обладает свойствами* α), β), γ). *Тогда определенный в L^2 оператор $A^{1/2}$ непрерывно действует из пространства L^2 в пространство L^p, где p — любое число, удовлетворяющее условию*

$$2 \leqslant p < p_0 \quad \left(\frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}=1\right).$$

Доказательство. Пусть $\varphi(s)\in L^2$. Обозначим через G_n ($n=1, 2, \ldots$) множество тех $s\in G$, в которых

$$2^{n-1} < |A^{1/2}\varphi(s)| \leqslant 2^n \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Так как $A^{1/2}\varphi\in L^2$, то $\operatorname{mes} G_n<\infty$ ($n=1, 2, \ldots$).

Введем в рассмотрение функцию $h(s)$ равенством

$$h(s)=\begin{cases}\operatorname{sign} A^{1/2}\varphi(s), & \text{если} \quad s\in G_n,\\ 0, & \text{если} \quad s\,\overline{\in}\, G_n.\end{cases}$$

Рассмотрим скалярное произведение $(A^{1/2}\varphi, h)$. В силу левого неравенства (4)

$$2^{n-1}\operatorname{mes} G_n \leqslant (A^{1/2}\varphi, h). \tag{5}$$

С другой стороны,

$$(A^{1/2}\varphi, h)=(\varphi, A^{1/2}h)\leqslant \|\varphi\|\sqrt{(Ah,\ h)}$$

и, так как $h\in L^{q_0}$:

$$\left\{\int\limits_G |h(s)^{q_0}|\,ds\right\}^{1/q_0}=(\operatorname{mes} G_n)^{1/q_0},$$

а оператор A непрерывно действует из L^{q_0} в L^{p_0}, то легко видеть, что

$$(A^{1/2}\varphi, h)\leqslant \|\varphi\|\cdot\|A\|_0^{1/2}(\operatorname{mes} G_n)^{1/q_0}. \tag{6}$$

Через $\|A\|_0$ здесь обозначена норма оператора A, действующего из L^{q_0} в L^{p_0}.

Из неравенств (5) и (6) следует, что

$$\operatorname{mes} G_n \leqslant \frac{C}{2^{np_0}}, \quad C=(2\sqrt{\|A\|_0}\cdot\|\varphi\|)^{p_0}. \tag{7}$$

Из правой части неравенства (4) и из неравенства (7) вытекает

$$\int\limits_{G_n} |A^{1/2}\varphi(s)|^p\,ds \leqslant \frac{C}{2^{(p_0-p)n}} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{8}$$

Через G_0 обозначим множество тех $s \in G$, в которых $|A^{1/2}\varphi(s)| \leqslant 1$. Так как $p \geqslant 2$, то

$$|A^{1/2}\varphi(s)|^p \leqslant |A^{1/2}\varphi(s)|^2 \quad (s \in G_0)$$

и

$$\int_{G_0} |A^{1/2}\varphi(s)|^p \, ds \leqslant \|A\| \cdot \|\varphi\|^2. \tag{9}$$

Утверждение теоремы теперь доказывается непосредственно:

$$\int_G |A^{1/2}\varphi(s)|^p \, ds \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \int_{G_n} |A^{1/2}\varphi(s)|^p \, ds,$$

и из (8) и (9) следует

$$\int_G |A^{1/2}\varphi(s)|^p \, ds \leqslant \|A\| \cdot \|\varphi\|^2 + C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(p_0-p)n} - 1} =$$

$$= \|A\| \cdot \|\varphi\|^2 + \frac{C}{2^{p_0-p} - 1}.$$

Теорема доказана.

Нам неизвестно, справедливо ли утверждение теоремы при $p = p_0$.

2. Оператор $A^{1/2}$, рассматриваемый как оператор, действующий из L^2 в L^p, будем обозначать через H. Сопряженный оператор H^* будет действовать тогда из пространства $L^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ в L^2. Напомним, что сопряженный оператор определяется равенством

$$(H\varphi, g) = (\varphi, H^* g) \quad (\varphi \in L^2, \quad g \in L^q).$$

Так как оператор $A^{1/2}$, рассматриваемый в L^2, эрмитов, то на функциях $g \in L^2 \cap L^q$

$$H^* g = A^{1/2} g.$$

Таким образом,

$$HH^* g = Ag \quad (g \in L^2 \cap L^q), \tag{10}$$

при этом, в силу теоремы 1, $HH^* g \in L^p$.

Множество $L^2 \cap L^q$ плотно в L^q — оно содержит, например, все ограниченные функции, отличные от нуля лишь на множествах конечной меры. Непрерывные операторы HH^* и A, действующие из L^q в L^p, принимают на $L^2 \cap L^q$ одинаковые значения. Следовательно,

$$HH^* g = Ag \quad (g \in L^q). \tag{11}$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2. *Пусть оператор A обладает свойствами* α), β), γ).

Тогда оператор A, рассматриваемый на функциях из L^q, представим в виде (11), *где H — непрерывный оператор, действующий из L^2 в L^p* $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Замечание. Из представления (11) следует, что в условиях теоремы 2 оператор A действует из L^q в L^2.

3. В этом пункте мы будем предполагать, что оператор A обладает дополнительным свойством:

δ) Оператор A, если его рассматривать в L^2, вполне непрерывен.

Если ядро $K(s, t)$ (или некоторая его итерация) интегрального оператора (2) удовлетворяет первому из условий (3), то интегральный оператор (2) обладает свойством δ).

Как это следует из общей теории, оператор $A^{1/2}$ при выполнении условия δ) вполне непрерывен в L^2. Настоящий пункт посвящен выяснению условий полной непрерывности оператора H, фигурирующего в представлении (11) и действующего из L^2 в пространство L^p.

Ниже мы используем следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\mathfrak{M}$ — компактное в L^2 семейство функций, p-е степени ($p > 2$) которых имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.*

Тогда $\mathfrak{M}$ включено в L^p и компактно в L^p.

Теорема 3. *Пусть оператор A обладает свойствами* α), β), γ), δ).

Тогда оператор H, фигурирующий в представлении (11) *оператора A и действующий из пространства L^2 в L^p, вполне непрерывен.*

Доказательство. Обозначим через T единичный шар пространства L^2. Множество $\mathfrak{M}$ функций $H\varphi = A^{1/2}\varphi$ $(\varphi \in T)$ компактно в L^2.

В силу леммы, для доказательства полной непрерывности оператора H достаточно доказать, что p-е степени функций $H\varphi$ $(\varphi \in T)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Выберем целое число n_0 так, что

$$\frac{2^{p_0} \| A \|^{p_0/2}}{2^{p_0-p}-1} \frac{1}{2^{(p_0-p)n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{12}$$

Пусть

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2^{pn_0+1}}. \tag{13}$$

Тогда для любого множества $E \subset G$ из $\operatorname{mes} E < \delta$ следует, что

$$\int_E |H\varphi(s)|^p ds < \varepsilon \quad (\varphi \in T).$$

Действительно, в силу (4), (7), (12) и (13)

$$\int_E |H\varphi(s)|^p ds \leqslant \int_E 2^{pn_0} ds +$$

$$+ \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \int_{G_n} |H\varphi(s)|^p \, ds \leqslant 2^{pn_0} \operatorname{mes} E + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{2^{p_0} \| A \|_0^{p_0/2}}{2^{(p_0-p)n}} < \varepsilon.$$

Таким образом, функции $|H\varphi(s)|^p$ $(\varphi \in T)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Теорема доказана.

Отметим, что из теоремы 3 следует, что и оператор H^* из представления (11) (действующий из L^q в L^2) также вполне непрерывен.

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
23 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М.—Л., 1950. [2] M. Golomb, Math. Zs., 39, H. 1 (1934).