Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 5

ФИЗИКА

О. И. СЕМАН

ПРИВЕДЕННАЯ ФОРМА ЭЙКОНАЛА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА И КОЭФФИЦИЕНТОВ АБЕРРАЦИЙ В ЭЛЕКТРОННОЙ ОПТИКЕ

(Представлено академиком А. А. Лебедевым 2 XI 1951)

Пусть имеется статическое электрическое и магнитное поле без свободных объемных зарядов, обладающее симметрией вращения. Точечный эйконал четвертого порядка E_{p4}, который для определения аберрации третьего порядка достаточно вычислить вдоль идеальных гауссовых траекторий, приводится к виду:

$$E_{p4} = \sum_{p=0}^{2} \frac{A^{2-p}}{(p!)^2} \left\{ \frac{(2p+1)!!}{4!\,2^p} \int_{z_0}^{z_i} S_p \mathbf{W}^{2p} dz + \right.$$
$$\left. + \left| \sum_{n=1}^{2p} \frac{q_{pn}}{(2p-n)!} \left(\mathbf{W}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} \right)^{2p-n} \mathbf{W}^{2p} \right|_{z_0}^{z_i} \right\}. \quad (1)$$

$\mathbf{W}(z)$ удовлетворяет параксиальному уравнению

$$\mathbf{W}''(z) + \left(\frac{3}{16} \frac{V'^2}{V^2} + \frac{1}{4} \frac{\mathcal{H}^2}{V} \right) \mathbf{W}(z) = 0, \quad (2)$$

где $V(z)$ — потенциал электрического поля; $H(z)$ — напряженность магнитного поля вдоль оси симметрии z, а $\mathcal{H}(z) = \sqrt{\frac{-e}{2m_0c^2}}\,H(z)$; e, m — заряд и масса электрона; c — скорость света.

Далее, $\mathbf{W} = \mathbf{u} V^{1/4}$, $\mathbf{u} = \mathbf{r} \cos\chi - \underset{\smile}{\mathbf{r}} \sin\chi$, $\chi = \frac{1}{2} \int_{z_a}^{z} \frac{\mathcal{H}}{\sqrt{V}} dz$, $\underset{\smile}{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{z}}{|z|} \times \mathbf{r}$,

$\mathbf{r}$ — нормальный к оси радиус-вектор электрона, а $\mathbf{u}$ — тот же вектор во вращающейся системе координат, где поворотом на угол $\chi(z)$ исключается параксиальное вращение, вызванное магнитным полем. $A = \mathbf{W} \times \mathbf{W}' = \mathrm{const}$ пропорционально вращательному импульсу *. Под $\left(\mathbf{W}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} \right)^{2p-n} \mathbf{W}^{2p}$ понимается $2p - n$-кратное последовательное применение операции $\mathbf{W}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{W}}$ к величине $\mathbf{W}^{2p}$, где $\frac{\partial}{\partial \mathbf{W}} = \mathrm{grad}_{\mathbf{W}}$; $(2p+1)!! = 1 \cdot 3 \cdots 2p+1$.

Аберрационные функции S_p, выражающиеся через распределение поля на оси, и постоянные q_{pn}, зависящие от значения поля в гранич-

* Векторное произведение плоских векторов $\mathbf{W} \times \mathbf{W}'$ считается скаляром, так же как $\mathbf{u}_A \times \mathbf{u}_B$ в формуле (6).

ных точках оси $\overset{*}{z_0}$, z_i, выражаются следующим образом:

$$S_0 = \frac{V'' + 4\mathscr{H}^2}{V^{3/2}}; \quad \overset{*}{S_1} = \frac{\mathscr{H}''}{V} - 3\frac{\mathscr{H}'V'}{V^2} + 3\frac{\mathscr{H}V'^2}{V^3} + 2\frac{\mathscr{H}^3}{V^2};$$

$$S_2 = \frac{1}{V^{1/2}}\left\{\frac{V'^4}{V^4} - \frac{V''V'^2}{V^3} + \frac{2}{5}\frac{V''^2}{V^2} - \frac{1}{10}\frac{V'V'''}{V^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{V'^2\mathscr{H}^2}{V^3} - \frac{7}{5}\frac{V'\mathscr{H}\mathscr{H}'}{V^2} + \frac{2}{5}\frac{V''\mathscr{H}^2}{V^2} + \frac{8}{15}\frac{\mathscr{H}^4}{V^2} + \frac{2}{3}\frac{\mathscr{H}'^2}{V} - \frac{2}{15}\frac{\mathscr{H}\mathscr{H}''}{V}\right\};$$

$$q_{00} = 0; \quad q_{11} = \frac{1}{8}\frac{\mathscr{H}}{V}; \quad q_{12} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\frac{V'\mathscr{H}}{V^2} - \frac{\mathscr{H}'}{V}\right);$$

$$q_{21} = \frac{1}{8}\frac{1}{V^{1/2}}; \quad q_{22} = -\frac{1}{48}\frac{V'}{V^{3/2}};$$

$$q_{23} = \frac{1}{32}\frac{1}{V^{1/2}}\left(\frac{V''}{V} + \frac{3}{4}\frac{V'^2}{V^2} + \frac{5}{3}\frac{\mathscr{H}^2}{V}\right);$$

$$q_{24} = \frac{1}{32}\frac{1}{V^{1/2}}\left(-\frac{V'''}{V} + \frac{5}{4}\frac{V'^3}{V^3} - \frac{V'V''}{V^2} + \frac{V'\mathscr{H}^2}{V^2} - \frac{10}{3}\frac{\mathscr{H}\mathscr{H}'}{V}\right). \qquad (3)$$

Вектор-функция $\mathbf{W}$ задается какими-либо двумя векторными параметрами. Примем для определенности за эти параметры значения $\mathbf{u}$ в плоскости предмета z_a и диафрагмы z_B. Тогда $\mathbf{W} = \mathbf{u}_a R_\gamma + \overset{*}{\mathbf{u}}_B R_\alpha$, где $\overset{*}{\mathbf{u}}_B = \frac{\mathbf{u}_B}{r_{\alpha B}}$, а R_α, R_γ — частные решения уравнения (2) для проекции вектора $\mathbf{W}$ на постоянное направление, удовлетворяющие граничным условиям

$$R_\alpha(z_a) = R_\gamma(z_B) = 0, \quad R'_\alpha(z_a) = R'_\gamma(z_a) = V_a^{1/4};$$

$r_{\alpha,\gamma} = R_{\alpha,\gamma}V^{1/4}$ — общепринятые основные решения ([1]) для составляющих вектора $\mathbf{u}$, который удовлетворяет уравнению

$$V\mathbf{u}'' + {}^1/_2 V'\mathbf{u}' + {}^1/_4 (V'' + \mathscr{H}^2)\mathbf{u} = 0.$$

Разложение E_p по степеням $\mathbf{u}_a$ $\mathbf{u}_B$ представим в виде

$$\frac{r_{\alpha B}}{\sqrt{V_a}} E_{p4} = \sum_{p=0}^{2} \frac{(\mathbf{u}_a \times \mathbf{u}_B)^{2-p}}{(p!)^2} \sum_{k=0}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} Q_{pk}\left(\mathbf{u}_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_B}\right)^k \mathbf{u}_B^{2p}. \qquad (4)$$

Все 9 коэффициентов разложения эйконала выразятся одной формулой

$$Q_{pk} = \left(\frac{V^{1/4}}{R_\alpha}\right)^{1+p-k} (-1)^k V_a^{\frac{1-p}{2}} \left\{\frac{(2p+1)!!}{4!2^p} \int_{z_0}^{z_i} S_p R_\alpha^{2p-k} R_\gamma^k dz + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{n=1}^{2p} \frac{q_{pn}}{(2p-n)!}\left(R_\alpha \frac{\partial}{\partial R_\alpha} + R'_\gamma \frac{\partial}{\partial R_\gamma}\right)^{2p-n} R_\alpha^{2p-k} R_\gamma^k\right]_{z_0}^{z_i}\right\}, \qquad (5)$$

$$p = 0,\ 1,\ 2; \quad k = 0, \ldots, 2p.$$

Ограничимся здесь определением поперечной аберрации в плоскости гауссового изображения z_b при отображении точки из предметной плоскости z_a

$$\Delta\mathbf{u}_{3b} = -\frac{m r_{\alpha B}}{\sqrt{V_a}} \frac{\partial E_{p4}(\mathbf{u}_a, \mathbf{u}_B, z_a, z_b)}{\partial \mathbf{u}_B}.$$

Находя градиент E_{p4} по $\mathbf{u}_3$ и обозначая коэффициенты $mQ_{pk}(z_a, z_b) = G_{pk}$, определяемые для плоскости изображения, где $m = r_{\gamma b}$ — увеличение, получим разложение аберрации третьего порядка в виде*:

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathbf{u}_{3b} = 2G_{00}(\mathbf{u}_a \times \mathbf{u}_B)\,\underset{\smile}{\mathbf{u}}_a + G_{10}\left[\mathbf{u}_B^2 \underset{\smile}{\mathbf{u}}_a + 2\mathbf{u}_B(\mathbf{u}_a \times \mathbf{u}_B)\right] - \\
- 2G_{11}\left[(\mathbf{u}_a \mathbf{u}_3)\,\underset{\smile}{\mathbf{u}}_a + (\mathbf{u}_a \times \mathbf{u}_B)\,\mathbf{u}_a\right] + G_{12}\,\mathbf{u}_a^2 \underset{\smile}{\mathbf{u}}_a + \\
+ G_{20}\mathbf{u}_B^3 - G_{21}\left[\mathbf{u}_B^2 \mathbf{u}_a + 2(\mathbf{u}_a \mathbf{u}_B)\,\mathbf{u}_B\right] + \\
+ G_{22}\left[\mathbf{u}_a^2 \mathbf{u}_B + 2(\mathbf{u}_a \mathbf{u}_B)\,\mathbf{u}_a\right] - G_{23}\mathbf{u}_a^3.
\end{aligned} \tag{6}
$$

В качестве независимых из 5 разных коэффициентов изотропной кривизны и астигматизма приняты коэффициенты G_{22}, G_{00}, соответственно пропорциональные меридиональной и Петцваля кривизне изображения.

Коэффициенты меридиональной средней и сагиттальной кривизны выразятся

$$\beta = 3G_{22}, \quad 2G_{22} + G_{00}, \quad G_{22} + 2G_{00}.$$

При устраненных прочих аберрациях фигура рассеяния представляет эллипс с полуосями $3G_{22} r_a^2 |\mathbf{u}_B|$, $(G_{22} + 2G_{00})\, r_a^2 |\mathbf{u}_B|$. Условие отсутствия астигматизма запишется $G_{22} = G_{00}$.

Коэффициенты аберрации разбиваются на серии по степеням $2p$ зависимости от R_α, R_γ.

$p = 0$. G_{00} — нулевой коэффициент, не зависящий явно от $R_\alpha R_\gamma$.

$p = 1$. G_{10}, G_{11}, G_{12} — коэффициенты анизотропной комы, астигматизма и дисторсии.

$p = 2$. G_{20}, G_{21}, G_{22}, G_{23} — коэффициенты изотропных аберраций: сферической, комы, кривизны (меридиональной), дисторсии. G_{24} (точнее, Q_{24}) входит при определении аберраций вне плоскости гауссового изображения.

Для коэффициентов ошибок изображения G_{pk} внеинтегральные слагаемые в квадратной скобке в формуле (5) примут значения:

$$[\quad]_{p0,\, p=0,1,2} = 0; \quad [\quad]_{11} = \frac{\sqrt{V_a}}{8} \left|\frac{\mathscr{H}}{V}\right|_{z_a}^{z_b};$$

$$[\quad]_{12} = \frac{1}{8} \left| \frac{r_\gamma^2}{\sqrt{V}} \left(2\mathscr{H} \frac{R'_\gamma}{R_\gamma} + \frac{1}{2} \frac{\mathscr{H} V'}{V} - \mathscr{H}' \right) \right|_{z_a}^{z_b}; \tag{7}$$

$$[\quad]_{21} = \frac{\sqrt{V_a}}{8} \left(\frac{V_a}{V_b} \frac{1}{m^2} - 1 \right); \quad [\quad]_{22} = \frac{V_a}{4} \left| \frac{1}{\sqrt{V}} \left(\frac{R'_\gamma}{R_\gamma} - \frac{1}{12} \frac{V'}{V} \right) \right|_{z_a}^{z_b};$$

$$[\quad]_{23} = \sqrt{V_a}\, \frac{3}{8} \left| r_\gamma^2 \left\{ \left(\frac{R'_\gamma}{R_\gamma} - \frac{1}{12} \frac{V'}{V} \right)^2 + \frac{1}{36} \left(\frac{3V''}{V} + 2 \frac{V'^2}{V^2} + 5 \frac{\mathscr{H}^2}{V} \right) \right\} \right|_{z_a}^{z_b}.$$

Решения $\mathbf{W}$, $R_{\alpha,\gamma}$ нормального уравнения (2) определяются без вычисления $\mathbf{W}'(z)$, $R'_\alpha(z)$, $R'_\gamma(z)$ точнее и проще обычных $\mathbf{u}(z)$, $r_{\alpha,\gamma}(z)$ как по простоте коэффициентов, так и независимости их от кривизны эквипотенциалей электрического поля. Применение квадратурного метода для интегрирования нормальной формы уравнения второго порядка сводит к минимуму накопление ошибок, а применение интер-

* $\underset{\smile}{\mathbf{u}}$ повернуто относительно $\mathbf{u}$ на угол $\pi/2$, так же как $\underset{\smile}{\mathbf{r}}$ относительно $\mathbf{r}$.

поляционных формул с экстремально убывающими коэффициентами, основанными на использовании центральных разностей, как в методе Коуэлла, максимально сокращает вычисления ([2], [3]).

Приведенная форма эйконала и коэффициентов аберраций не содержит распределения $W'(z)$, $R'_{\alpha, \gamma}(z)$, а лишь значения этих производных, связанные с граничными значениями поля, энергии и параксиальных параметров, которые могут быть найдены численным дифференцированием таблиц $R_{\alpha, \gamma}$ в граничных точках.

В этом смысле предложенная форма эйконала и коэффициентов аберраций может быть названа нормальной, так как соответствует нормальной форме уравнения (2). Нормальная форма коэффициентов (5), (7), благодаря: а) существованию S-функций, общих для целой серии аберраций; б) независимости коэффициентов от распределения $R'_{\alpha, \gamma}$; в) возможности применения численных методов, приводящих к нужной точности при минимальной затрате времени, а также ряду других преимуществ, позволяет сократить численный расчет аберраций.

Поступило
9 V 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Busch u. L. Brüche, Beiträge zur Elektronenoptik, Leipzig, 1937. [2] М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, 2, М.—Л., 1937. [3] H. Motz and L. Klanfer, Proc. Phys. Soc., 58, 30 (1946).