

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР Н. Н. БОГОЛУБОВ

**К ВОПРОСУ ОБ ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЯХ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ
КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ**

В современных работах по квантовой теории поля обычно исходят из представления о взаимодействии, в котором волновой вектор Φ рассматривается как функционал пространственно подобной поверхности ε и уравнение Шредингера принимает вид:

$$\hat{H}(\Phi, \varepsilon) \equiv H(x, \varepsilon) \Phi(\varepsilon).$$

Совершенно ясно, однако, из соображений ковариантности, что введение произвольных пространственно подобных поверхностей является вообще излишним и что вполне достаточно ограничиться классом пространственно подобных гиперплоскостей.

Такие гиперплоскости мы можем задать уравнением

$$x_4 = x_0 - \sum_{A=1}^3 X_{dE} \tau_A$$

с единичным временно подобным вектором E , характеризуя их скаляром τ и тремя пространственными компонентами E_r тем самым волновой вектор становится функцией указанных четырех переменных.

Если желать сохранить наиболее характерные черты современной теории — строгую детерминированность эволюции волнового вектора и сохранение его нормы при переходе от одной гиперплоскости к другой — мы должны будем написать основные волновые уравнения, например, в следующей форме:

$$\hat{H}_0 \hat{H}_0 = H \langle \hat{H}_0 \rangle \langle \hat{H}_0 \rangle$$

$$\hat{H}_0 \hat{H}_0 = H \dots, \text{зги-., а), } \tau = 1, 2, 3,$$

в которой операторы H , H_0 должны быть эрмитовыми. При этом можем считать, как и обычно, \hat{H}_0 и H являются выражениями, зависящими от операторов рождения и уничтожения свободных частиц. Условия совместности системы уравнений (1) будут:

$$\hat{H}_0 \hat{H}_0 + \dots = \hat{H}_0 \hat{H}_0 + H_{,n}$$

$$\hat{H}_0 \hat{H}_0 + \dots = \hat{H}_0 \hat{H}_0 + H_{,n}$$

(2)
|||

Чтобы сформулировать требование релятивистской ковариантности этих уравнений, введем унитарный оператор U_L , с помощью которого преобразуются операторы свободных частиц при преобразовании пространства лоренцовским преобразованием $L = L_{rot}L_{tr}$ (где $L_{tr}x = x + a$). Тогда это условие можем записать в виде:

$$\dot{U}_L H(\tau, \xi) U_L = H(\tau + a\xi, L_r\xi), \quad (3)$$

$$\sum_{(1 \leq \alpha \leq 3)} \dot{U}_L H(\tau, \xi) U_L \delta\xi_\alpha = \sum_{(1 \leq \alpha \leq 3)} H_\alpha(\tau + a\xi, L_r\xi) (\delta L_r\xi)_\alpha,$$

откуда следует, что преобразованный волновой вектор

$$\Phi'(\tau, \xi) = U_L \Phi(\tau + a\xi, L_r\xi) \quad (4)$$

также удовлетворяет уравнениям (1).

Таким образом с помощью (4) мы можем определить преобразование волнового вектора при лоренцовском преобразовании $x \rightarrow Lx$.

На основе (4) нетрудно также получить выражения для компонент полного импульса и момента системы.

Для этого стоит только рассмотреть бесконечно малое лоренцовское преобразование:

$$x_\alpha \rightarrow x_\alpha + \delta a_\alpha + \sum_{(0 \leq \beta \leq 3)} g_\alpha x_\beta \delta\omega_{\alpha\beta}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3, \quad (5)$$

$$g_0 = 1, \quad g_1 = g_2 = g_3 = -1, \quad \delta\omega_{\alpha\beta} + \delta\omega_{\beta\alpha} = 0$$

и соответствующее бесконечно малое преобразование

$$U_L = 1 + \frac{1}{i\hbar} \left\{ (P^0 \cdot \delta a) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta}^0 \delta\omega_{\alpha\beta} \right\},$$

где P^0 — полный импульс и $M_{\alpha\beta}^0$ — компоненты момента для системы из невзаимодействующих частиц.

Как следует из (4), при бесконечно малом преобразовании (5) волновой вектор получает приращение:

$$\begin{aligned} \delta\Phi(\tau, \xi) = & \frac{1}{i\hbar} \left\{ (P^0 \cdot \delta a) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} M_{\alpha\beta}^0 \delta\omega_{\alpha\beta} + \right. \\ & \left. + (\xi \cdot \delta a) H - \sum_{\substack{(1 \leq \alpha \leq 3) \\ (0 \leq \beta \leq 3)}} H_{\alpha\xi\beta} \delta\omega_{\alpha\beta} \right\} \Phi(\xi, \tau). \end{aligned}$$

Отсюда для компонент полного импульса и момента, с учетом взаимодействия, получаем выражения:

$$P_\alpha = P_\alpha^0 + \xi_\alpha H(\tau, \xi),$$

$$M_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}^0 + \{\xi_\beta H_\alpha(\tau, \xi) - \xi_\alpha H_\beta(\tau, \xi)\}, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3,$$

(6)

$$M_{\alpha 0} = M_{\alpha 0}^0 + \xi_0 H_\alpha(\tau, \xi), \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Легко проверить, что полученные выражения действительно обладают необходимыми свойствами для представления компонент импульса и момента. Так например, их средние, взятые по волновому вектору $\Phi(\tau, \xi)$, не зависят от ξ , средний импульс преобразуется как четырехвектор, и т. п.

Подчеркнем, что основной проблемой здесь является фактическое построение уравнений (1) с операторами H, H_α , удовлетворяющими упомянутым ранее требованиям.

Чтобы подойти к ее решению, предположим на минуту, что мы можем построить унитарный оператор $S(\tau, \xi)$, удовлетворяющий условию

$$\overset{\dagger}{U}_L S(\tau, \xi) U_L = S(\tau + a\xi, L, \xi).$$

Тогда ясно, что выражения

$$H = i\hbar \frac{\partial S}{\partial \tau} \overset{\dagger}{S}; \quad H_\alpha = i\hbar \frac{\partial S}{\partial \xi^\alpha} \overset{\dagger}{S}$$

удовлетворяют всем наложенным требованиям.

Это замечание, однако, обесценивается тем обстоятельством, что во всех физически интересных случаях такого оператора $S(\tau, \xi)$ вообще не существует.

Точнее, если такой оператор существует, то все энергетические уровни рассматриваемой системы с наличием взаимодействия будут те же, что и при полном отсутствии взаимодействия.

Указанную трудность можно попытаться обойти, заметив, что нам вовсе не требуется, чтобы существовал сам оператор $S(\tau, \xi)$, переводящий волновой вектор свободных невзаимодействующих частиц в $\Phi(\tau, \xi)$; необходимо лишь, чтобы имело смысл символическое произведение $S(\tau, \xi) \overset{\dagger}{S}(\tau', \xi')$, представляющее оператор преобразования волнового вектора с гиперплоскости (τ', ξ') на гиперплоскость (τ, ξ) .

Рассмотрим формальное разложение

$$S(\tau, \xi) = 1 + \frac{1}{i\hbar} S(\tau, \xi) + \dots + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n S_n(\tau, \xi) + \dots \quad (7)$$

такое, что

$$\overset{\dagger}{U}_L S_n(\tau, \xi) U_L = S_n(\tau + a\xi, L, \xi) \quad (8)$$

и

$$\overset{\dagger}{S}_1 = S_1, \quad S_n + (-1)^n \overset{\dagger}{S}_n + \sum_{(1 \leq k \leq n-1)} (-1)^{n-k} S_k \overset{\dagger}{S}_{n-k} = 0. \quad (9)$$

Тогда выражения:

$$H = \frac{\partial S_1}{\partial \tau} + \frac{1}{i\hbar} \left(\frac{\partial S_2}{\partial \tau} - \frac{\partial S_1}{\partial \tau} \overset{\dagger}{S}_1 \right) + \dots + \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^n \sum_{(1 \leq k \leq n)} \frac{\partial S_k}{\partial \tau} \overset{\dagger}{S}_{n-k} (-1)^{n-k} + \dots, \quad (10)$$

$$H_\alpha = \frac{\partial S_1}{\partial \xi^\alpha} + \frac{1}{i\hbar} \left(\frac{\partial S_2}{\partial \xi^\alpha} - \frac{\partial S_1}{\partial \xi^\alpha} \overset{\dagger}{S}_1 \right) + \dots + \left(\frac{1}{i\hbar} \right)^n \sum_{(1 \leq k \leq n)} \frac{\partial S_k}{\partial \xi^\alpha} \overset{\dagger}{S}_{n-k} (-1)^{n-k} + \dots$$

формально удовлетворяют нашим условиям.

Выражения для H, H_α получаются таким образом в виде рядов, однако и обычные уравнения квантовой теории поля содержат разложения ряда величин, например полевой массы и заряда, используемые для ренормировки.

Здесь возникает проблема подбора $S_n(\tau, \xi)$ так, чтобы ряды (10) имели смысл и ряд

$$S(\tau', \xi') \overset{+}{S}(\tau, \xi) = 1 + \dots + \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \sum_{(0 \leq k \leq n)} (-1)^{n-k} S_k(\tau', \xi') \overset{+}{S}_{n-k}(\tau, \xi) + \dots \quad (11)$$

сходился, хотя бы для τ', ξ' , достаточно близких к τ, ξ . Это последнее условие обеспечило бы возможность интеграции основных уравнений (1).

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
18 X 1951