Доклады Академии Наук СССР
1951. Том LXXXI, № 5

МЕХАНИКА

И. С. АРЖАНЫХ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ МЕТОДА А. Н. КРЫЛОВА НА ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МАТРИЦЫ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 11 X 1951)

А. Н. Крылов предложил (1) эффективный метод для вычисления коэффициентов характеристического уравнения теории колебаний материальных систем. Алгебраической основой этого метода, как известно (2-4), является теорема Гамильтона — Кэли. Для полиномиальных матриц порядка n

$$\Phi(\lambda) = I\lambda^s - A_1\lambda^{s-1} - A_2\lambda^{s-2} - \ldots - A_{s-1}\lambda - A_s \tag{1}$$

непосредственное применение метода Крылова вводит один вектор с sn составляющими, причем используются все элементы матрицы

$$A = \begin{Vmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_{s-1} & A_s \\ I & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & I & 0 \end{Vmatrix} \tag{2}$$

и ее степеней $A^2, A^3, \ldots, A^{sn}$. Предлагаемая ниже методика основана на обобщении (5) теоремы Гамильтона — Кэли. Это приводит к сокращению вычислений за счет расчленения вектора с sn составляющими на s векторов по n составляющих.

Условимся в следующих обозначениях: $m = s(n-1)$, $A^{(0)} = I$,

$$A^{(-p)} = 0, \quad \text{если } p > 0; \tag{3}$$

$$A^{(\mu)} = A_1 A^{(\mu-1)} + A_2 A^{(\mu-2)} + \ldots + A_s A^{(\mu-s)}; \tag{4}$$

$$A_\sigma^{(\mu)} = A_\sigma A^{(\mu-1)} + A_{\sigma+1} A^{(\mu-2)} + \ldots + A_s A^{(\mu-(s-\sigma)-1)}; \tag{5}$$

$$\mu = 1, 2, \ldots, m, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, s.$$

Обозначим коэффициенты характеристического уравнения матрицы $\Phi(\lambda)$ через α_π ($\pi = 1, 2, \ldots, sn$):

$$|\Phi(\lambda)| = \lambda^{sn} + \alpha_1\lambda^{sn-1} + \ldots + \alpha_{sn-1}\lambda + \alpha_{sn} = 0. \tag{6}$$

Лемма. Матрицы A_σ удовлетворяют следующим s тождествам:

$$A_\sigma^{(m)} + \alpha_1 A_\sigma^{(m-1)} + \ldots + \alpha_{m-1} A_\sigma^{(1)} + \alpha_m A_\sigma + \alpha_{m+\sigma} I = 0, \tag{7}$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots, s.$$

В самом деле, если $\Psi(\lambda)$ — присоединенная матрица, то $\Phi\Psi \equiv I\,|\Phi|$. Отсюда следует тождество

$$\left(\lambda^s I - \sum_{\sigma=1}^{s} \lambda^{s-\sigma} A_\sigma\right)\left(\lambda^m I + \sum_{\mu=1}^{m} \lambda^{m-\mu} B_\mu\right) \equiv I\left(\lambda^{sn} + \sum_{\pi=1}^{sn} \lambda^{sn-\pi} \alpha_\pi\right),$$

$$B_\mu = A^{\cdot\mu} + \alpha_1 A^{\cdot\mu-1} + \cdots + \alpha_{\mu-1} A^{\cdot 1} + \alpha_\mu I. \tag{8}$$

Приравнивая коэффициенты при $\lambda^{s-1}, \lambda^{s-2}, \ldots, \lambda, 1$, получим указанные тождества.

Замечание. Из (7) следует, что матрицы A_σ удовлетворяют s уравнениям $\varphi_{m+\sigma}(A^{\cdot}) = 0$, где

$$\varphi_k(A^{\cdot}) \equiv A^{\cdot k} + \sum_{\varkappa=1}^{k} \alpha_\varkappa A^{\cdot k-\varkappa}, \quad k = m+1, m+2, \ldots, sn. \tag{9}$$

В теории колебаний материальных систем наиболее важным является случай $s=2$ (A_2 — матрица коэффициентов потенциала сил, A_1 — сумма матриц коэффициентов гироскопических и диссипативных сил). Здесь легко установить формулы для $A_1^{\cdot\mu}, A_2^{\cdot\mu}$, $\mu = 1, 2, \ldots, 2(n-1)$. Положим для краткости $A_1 = g$, $A_2 = h$. Тогда будем иметь

$$g^{\cdot\mu} = A^{\cdot\mu+1} = gA^{\cdot\mu} + hA^{\cdot\mu-1}, \quad h^{\cdot\mu} = hA^{\cdot\mu},$$

причем

$$\begin{aligned}
&A^{\cdot 1} = g, \quad A^{\cdot 2} = g^2 + h, \quad A^{\cdot 3} = g^3 + (2)\,gh,\\
&A^{\cdot 4} = g^4 + (3)\,g^2h + h^2, \quad A^{\cdot 5} = g^5 + (4)\,g^3h + (3)\,gh^2,\\
&A^{\cdot 6} = g^6 + (5)\,g^4h + (6)\,g^2h^2 + h^3,\\
&A^{\cdot 7} = g^7 + (6)\,g^5h + (10)\,g^3h^2 + (4)\,gh^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Здесь слагаемое вида $(r)\,g^p h^q$ обозначает r всех возможных произведений, где g повторяется p раз, а h, соответственно, q раз. В данном случае будем иметь два тождества (7):

$$g^{\cdot 2(n-1)} + \sum_{\rho=1}^{2n-3} \alpha_\rho g^{\cdot 2(n-1)-\rho} + \alpha_{2(n-1)}\, g + \alpha_{2n-1} I = 0,$$

$$h^{\cdot 2(n-1)} + \sum_{\rho=1}^{2n-3} \alpha_\rho h^{\cdot 2(n-1)-\rho} + \alpha_{2(n-1)}\, h + \alpha_{2n} I = 0.$$

Например, для системы с тремя степенями свободы имеем:

$$\begin{gathered}
g^5 + g^3h + g^2hg + ghg^2 + hg^3 + gh^2 + hgh + h^2g +\\
+ \alpha_1(g^4 + g^2h + ghg + hg^2 + h^2) + \alpha_2(g^3 + gh + hg) +\\
+ \alpha_3(g^2 + h) + \alpha_4 g + \alpha_5 I = 0,
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
hg^4 + hg^2h + 2\,(hg)^2 + h^3 + \alpha_1(hg^3 + hgh + h^2g) +\\
+ \alpha_2(hg^2 + h^2) + \alpha_3 hg + \alpha_4 h + \alpha_6 I = 0.
\end{gathered}$$

Перейдем к вопросу о представлении уравнения (6) в форме А. Н. Крылова. Возьмем s векторов $\underset{\sigma}{\mathbf{x}}$:

$$\underset{1}{\mathbf{x}} = (\underset{1}{x_1}, \underset{1}{x_2}, \ldots, \underset{1}{x_n}), \ldots, \quad \underset{s}{\mathbf{x}} = (\underset{s}{x_1}, \underset{s}{x_2}, \ldots, \underset{s}{x_n}),$$

и вычислим векторы

$$\underset{\sigma}{\mathbf{x}}^{(0)} = A_\sigma \underset{\sigma}{\mathbf{x}}, \quad \underset{\sigma}{\mathbf{x}}^{(\mu)} = A^{\cdot\mu}_\sigma \underset{\sigma}{\mathbf{x}}, \quad \mu = 1, 2, \ldots, m, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, s.$$

Составим затем матрицу X порядка sn с элементами

$$\underset{1}{x_\nu^{(m-1)}}, \underset{1}{x_\nu^{(m-2)}}, \ldots, \underset{1}{x_\nu^{(1)}}, \underset{1}{x_\nu^{(0)}}, \underset{1}{x_\nu}, 0, \ldots, 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underset{s}{x_\nu^{(m-1)}}, \underset{s}{x_\nu^{(m-2)}}, \ldots, \underset{s}{x_\nu^{(1)}}, \underset{s}{x_\nu^{(0)}}, 0, 0, \ldots, \underset{s}{x_\nu},$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n,$$

или, кратко,

$$X = \left\{ \underset{\sigma}{x_\nu^{(m-1)}}, \underset{\sigma}{x_\nu^{(m-2)}}, \ldots, \underset{\sigma}{x_\nu^{(1)}}, \underset{\sigma}{x_\nu^{(0)}}, \ldots, \underset{\sigma}{x_\nu}, \ldots, 0 \right\},$$

$$\sigma = 1, 2, \ldots, s, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

и обозначим через $|X|$ ее определитель. Выберем векторы $\underset{\sigma}{\mathbf{x}}$ так, чтобы $|X| \neq 0$.

Теорема. *Уравнение* (6) *с точностью до множителя* $|X|$ *совпадает с уравнением*

$$\begin{vmatrix} \lambda^{sn} & \lambda^{sn-1} \cdots \lambda^{s} & \lambda^{s-1} \cdots \lambda^{s-\sigma} \cdots 1 \\ \underset{\sigma}{x_\nu^{(m)}} & \underset{\sigma}{x_\nu^{(m-1)}} \cdots \underset{\sigma}{x_\nu^{(0)}} & 0 \quad \cdots \underset{\sigma}{x_\nu} \quad \cdots 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Из соотношений (7) имеем sn однородных относительно $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{sn}$ уравнений

$$\underset{\sigma}{x_\nu^{(m)}} + \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu \underset{\sigma}{x_\nu^{(m-\mu)}} + \alpha_{m+\sigma} \underset{\sigma}{x_\nu} = 0, \quad \sigma = 1, 2, \ldots, s, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Присоединяя уравнение (6), исключим α_π. В результате получим указанное уравнение, которое не будет тождеством, так как $|X| \neq 0$.

Рассмотрим более подробно структуру уравнения (10) для механических систем. Здесь необходимо по двум векторам $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ построить векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(0)} &= g\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^{(\mu)} = (gA^{\cdot\mu} + hA^{\cdot\mu-1})\,\mathbf{x}, \\ \mathbf{y}^{(0)} &= h\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}^{(\mu)} = hA^{\cdot\mu}\,\mathbf{y}. \end{aligned} \tag{11}$$

При этом $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ должны быть такими, чтобы

$$\begin{vmatrix} x_\nu^{(m-1)} \cdots x_\nu^{(0)} & x_\nu & 0 \\ y_\nu^{(m-1)} \cdots y_\nu^{(0)} & 0 & y_\nu \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если это условие выполнено, то частоты колебаний ($\mathrm{Im}\,\lambda$) и коэффициенты затухания ($\mathrm{Re}\,\lambda$) определяются с помощью корней векового уравнения

$$\begin{vmatrix} \lambda^{2n} & \lambda^{2n-1}\cdots\lambda^2 & \lambda & 1 \\ x_1^{(m)} & x_1^{(m-1)}\cdots x_1^{(0)} & x_1 & 0 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^{(m)} & x_n^{(m-1)}\cdots x_n^{(0)} & x_n & 0 \\ y_1^{(m)} & y_1^{(m-1)}\cdots y_1^{(0)} & 0 & y_1 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ y_n^{(m)} & y_n^{(m-1)}\cdots y_n^{(0)} & 0 & y_n \end{vmatrix} = 0. \qquad (12)$$

Заметим, что при распространении метода Леверрье на полиномиальные матрицы можно так же значительно сократить число умножений и сложений за счет обобщения формул Ньютона на случай полиномиальных матриц. Однако и в этом упрощенном применении метода Леверрье общее число необходимых вычислений превышает соответствующее число в указанном выше методе.

Институт математики и механики
Академии наук Узб.ССР

Поступило
3 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Крылов, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 4, 463 и 491 (1931). [2] П. А. Широков, Тензорное исчисление, ч. 1, М., 1934. [3] Г. Вейленд, Усп. матем. наук, **2**, в. 4 (1947). [4] В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, М., 1950. [5] И. С. Аржаных, Доклады АН Узб.ССР, № 7 (1951).