Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 3

МАТЕМАТИКА

Я. М. КАЖДАН

О ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ДЛЯ J_p-МАТРИЦ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 6 XII 1951)

Настоящая заметка посвящена некоторым вопросам проблемы моментов, связанным с якобиевыми матрицами и их обобщениями — регулярными J_p-матрицами. В ее первой части мы, пользуясь методом, развитым Б. М. Левитаном при доказательстве теоремы разложения по собственным функциям самосопряженных дифференциальных уравнений [2,1], строим решение степенной матричной проблемы моментов, соответствующей регулярной J_p-матрице.

Степенная матричная проблема моментов нашла свое развитие в работах М. Г. Крейна [3,4], в частности, в работе [4] им было показано, что каждой регулярной J_p-матрице соответствует некоторая степенная проблема моментов. Решение, даваемое нами, вполне элементарно: предельный переход от укороченной проблемы моментов к полной проблеме моментов, которым мы пользуемся при нашем построении, избавляет нас от необходимости применения спектральной теории эрмитовых операторов. Во второй части этой заметки мы находим спектры функций распределения, соответствующих классической степенной проблеме моментов, связанной с некоторыми специальными видами якобиевых матриц [1].

I. Напомним некоторые определения. Бесконечная симметричная матрица $A = \| a_{ik} \|_0^\infty$ называется регулярной J_p-матрицей, если она представима в виде $A = \| A_{ik} \|_0^\infty$, где A_{ik} — квадратные матрицы p-го порядка, причем $A_{ik} = 0$ при $|i-k| > 1$, а матрицы $A_{i,\,i+1}$ неособенные. Матрица-функция $T(\lambda)$ называется монотонно возрастающей, если для любого интервала $\Delta(\lambda, \lambda+\Delta)$ и любых комплексных чисел $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{p} t_{ij}(\Delta)\, \xi_i \bar{\xi}_j \geqslant 0 \quad (t_{ij}(\Delta) = t_{ij}(\lambda+\Delta) - t_{ij}(\lambda)). \tag{1}$$

Имеет место следующая теорема, эквивалентная решению степенной матричной проблемы моментов [4]:

Теорема. *Пусть A — регулярная J_p-матрица, а $D_k(\lambda)$ — последовательность связанных с нею матричных полиномов, задаваемых рекурентными соотношениями*

$$A_{k,\,k-1} D_{k-1}(\lambda) + A_{k,\,k} D_k(\lambda) + A_{k,\,k+1} D_{k+1}(\lambda) = \lambda D_k(\lambda), \tag{2}$$

причем $D_{-1}(\lambda) = 0$, а $D_0(\lambda)$ — произвольная симметрическая неособенная матрица, которую мы простоты ради будем считать единичной: $D_0(\lambda) = J$.

Существует, по крайней мере, одна симметричная, монотонно возрастающая матрица-функция $T(\lambda) = \{t_{ij}(\lambda)\}_{i,\,j=1}^{p}$, *для которой справедливы равенства*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} D_i(\lambda)\, D_j(\lambda)\, dT(\lambda) = \delta_{ij} J.$$

Для простоты изложения дадим доказательство для случая $p=1$, что соответствует классической проблеме моментов. Доказательство общего случая не содержит никаких дополнительных трудностей по существу и может быть проведено тем же методом (ср. ([2])). Соотношения (2) в рассматриваемом случае примут вид:

$$a_{k,\,k-1} y_{k-1}(\lambda) + a_{k,\,k} y_k(\lambda) + a_{k,\,k+1} y_{k+1}(\lambda) = \lambda y_k(\lambda). \tag{3}$$

Укороченной проблеме моментов будет соответствовать граничная задача:

$$\begin{gathered} a_{k,\,k-1} y_{k-1}(\lambda) + a_{k,\,k} y_k(\lambda) + a_{k,\,k+1} y_{k+1}(\lambda) = \lambda y_k(\lambda), \\ y_{-1} = 0, \quad y_0 = 1, \quad y_{n+1} + h y_n = 0, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n. \end{gathered} \tag{4}$$

Пусть $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения граничной задачи (4) (как известно, они все различны между собой) и $\{y_{0i}^{(n)}, y_{1i}^{(n)}, \ldots, y_{ni}^{(n)}\}$ — собственное решение, соответствующее собственному значению λ_i. Легко видеть, что собственные решения, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Для построения функции распределения, соответствующей укороченной проблеме моментов, найдем решение следующей системы уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} y_{k,\,i} y_{l,\,i}\, \Delta\sigma_i^{(n)} = \delta_{kl}. \tag{5}$$

Умножая каждое уравнение на $y_{l,\,j}$ и суммируя по l, получим

$$\sum_{l=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} y_{k,\,i} y_{l,\,i} y_{l,\,j} \Delta\sigma_i^{(n)} = y_{k,\,j}. \tag{6}$$

В силу ортогональности собственных решений получаем $\Delta\sigma_j^{(n)} = 1 \Big/ \sum\limits_{l=0}^{n} y_{l,\,j}^2$.

Пусть $d_{i,\,n}^2 = \sum\limits_{l=0}^{n} y_{l,\,j}^2$. Величина d_{in} равна норме i-го собственного решения. Определим функцию $\sigma_n(\lambda)$ следующим образом:

$$\sigma_n(\lambda) = -\sum_{0 \geqslant \lambda_{i,\,n} > \lambda} \frac{1}{d_{i,\,n}^2} \quad (\lambda \leqslant 0); \quad \sigma_n(\lambda) = \sum_{0 < \lambda_{i,\,n} \leqslant \lambda} \frac{1}{d_{i,\,n}^2} \quad (\lambda > 0). \tag{7}$$

Так определенная функция монотонна и при любом n имеет ограниченное изменение на всей прямой, не зависящее от n.

В самом деле, $\sum\limits_{i=0}^{n} y_{0,\,i}^2 \Delta\sigma_i^{(n)} = y_0^2 \sum\limits_{i=0}^{n} \Delta\sigma_i^{(n)} = 1$. Следовательно, $\sum\limits_{i=0}^{n} \Delta\sigma_i^{(n)} = \dfrac{1}{y_0^2} = 1$. Уравнения (4) при изменении λ вдоль всей вещественной оси определяют $n+1$ полиномов от λ: $y_0 = 1$, $y_1(\lambda), \ldots$ $\ldots, y_n(\lambda)$, причем $y_k(\lambda)$ в точке λ_i принимает значение $y_{k,\,i}$. Поэтому справедливо следующее равенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_k(\lambda)\, y_l(\lambda)\, d\sigma_n(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} y_{k,\,i} y_{l,\,i} \Delta\sigma_i^{(n)} = \delta_{k,\,l}. \tag{8}$$

Так как определение $y_k(\lambda)$, $y_l(\lambda)$ $(k, l \leqslant n)$ не зависит от n, то равенство (8) остается справедливым при любом сколь угодно большом n. В силу 1-й теоремы Хэлли из множества функций $\sigma_n(\lambda)$ можно выделить сходящуюся к некоторой монотонной функции $\sigma(\lambda)$ подпоследовательность функций $\sigma_{n_i}(\lambda)$. Функция $\sigma(\lambda)$ и будет искомой функцией распределения.

Действительно, существует такое большое N, что при $|\lambda| > N$ полином $y_{2(k+l)}(\lambda)$ сохраняет знак $+$. Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} y_{2(k+l)}\, d\sigma_n = \begin{cases} 1 \text{ при } k = l = 0, \\ 0 \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

то

$$\int_{-\infty}^{-N} y_{2(k+l)}\, d\sigma_n + \int_{N}^{\infty} y_{2(k+l)}\, d\sigma_n \leqslant 1 + \max_{-N \leqslant \lambda \leqslant N} y_{2(k+l)}(\lambda) = A. \tag{9}$$

Для заданного ε выберем величину N' так, чтобы: 1) $N' > N$; 2) при $|\lambda| > N'$ имело место неравенство $|y_k y_l| < \varepsilon y_{2(k+l)}$ и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{-N'} |y_k y_l|\, d\sigma_n + \int_{N'}^{\infty} |y_k y_l|\, d\sigma_n <$$

$$< \varepsilon \left\{ \int_{-\infty}^{-N} y_{2(k+l)} d\sigma_n + \int_{N}^{\infty} y_{2(k+l)} d\sigma_n \right\} \leqslant \varepsilon A. \tag{10}$$

В силу 2-й теоремы Хэлли можем перейти к пределу:

$$\delta_{k,\,l} = \int_{-\infty}^{\infty} y_k(\lambda)\, y_l(\lambda)\, d\sigma_n(\lambda) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} y_k(\lambda)\, y_l(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \delta_{k,\,l}, \tag{11}$$

что и требовалось доказать.

Если последовательность чисел $f(n)$ принадлежит l_2, то, в силу полноты пространства $L_2(\sigma)$, из соотношения (11) легко получить равенство Парсеваля:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f^2(n) = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)\, d\sigma(\lambda). \tag{12}$$

Функция $F(\lambda)$ является пределом в среднем квадратичном последовательности полиномов $F_n(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k y_k(\lambda)$, т. е. $\lim \int\limits_{-\infty}^{\infty} \{F(\lambda) - F_n(\lambda)\}^2\, d\sigma(\lambda) = 0$.

II. *Пусть* A — *якобиева матрица*: $\|a_{ik}\|_0^{\infty}$, $a_{ik} = 0$ *при* $|i-k| > 1$, $a_{k,\,k+1} = a_{k+1,\,k} > 0$, *а* $\sigma(\lambda)$ — *спектральная функция, соответствующая этой матрице, пронормированная* $\sigma(-\infty) = 0$. *Если* $a_{k,\,k+1} < M$ *и* $a_{k,\,k} \to +\infty$ (*соотв.* $a_{k,\,k} \to -\infty$), *то спектральная функция определяется однозначно, спектр дискретен, ограничен слева* (*соотв. справа*).

Доказательство проведем для случая $a_{k,\,k} \to +\infty$ (для случая $a_{kk} \to -\infty$ теорема доказывается тем же методом). Бесконечная система линейных уравнений, определенная матрицей $A - \lambda J$, запишется в следующем виде:

$$a_{k, k-1} y_{k-1} + a_{kk} y_k + a_{k, k+1} y_{k+1} = \lambda y_k. \tag{13}$$

Обозначим через $N(\lambda)$ такое целое число, что при $n > N(\lambda)$ $\lambda - a_{nn} < -2M$.

1. При данном λ существует такое $N_1(\lambda)$, что для всех $n > N_1(\lambda)$ выполняется неравенство $y_n y_{n+1} < 0$. Из соотношения (13) легко следует, что, если при $n > N(\lambda)$ имеет место $y_n y_{n+1} > 0$ или $y_n = 0$, то $|y_{n+2}| > |y_{n+1}|$ и $y_{n+2} y_{n+1} < 0$. Из этого же соотношения получаем, что, если при некотором $n > N(\lambda)$ имеет место $|y_{n+1}| > |y_n|$, то $|y_{n+2}| > |y_{n+1}|$ и $y_{n+2} y_{n+1} < 0$, что доказывает наше утверждение.

2. Перенумеруем нули полинома $y_n(\lambda)$ в порядке возрастания: $\lambda_{0n} < \lambda_{1n} < \ldots < \lambda_{nn}$. Последовательность λ_{kn} в силу теоремы Штурма монотонно убывает. Пусть $\lim \lambda_{k, n} = \lambda_k$. Докажем, что $\lambda_k \neq \lambda_{k+1}$. Допустим противное: $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \lambda$. В силу перемежаемости нулей можно выбрать величину λ^* столь близкой к величине λ и номер $n > N(\lambda)$ так, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\lambda^* - a_{nn} < -2M \quad \text{при} \quad n > N(\lambda);$$

$$\lambda_{k-1, n} < \lambda_{k, n+1} < \lambda^* < \lambda_{k, n} < \lambda_{k+1, n+1}. \tag{14}$$

При этом, согласно осцилляционной теореме, $y_n(\lambda^*) y_{n+1}(\lambda^*) > 0$, так как $\lambda_{k+1, n}$ также стремится к λ и $\lambda < \lambda^* < \lambda_{k+1, n+1}$, то существует такой номер $m > n$, что

$$\lambda_{k, m} < \lambda_{k+1, m+1} < \lambda^* < \lambda_{k+1, m} < \lambda_{k+2, m+1}, \quad \text{т. е.} \quad y_m(\lambda^*) y_{m+1}(\lambda^*) > 0, \tag{15}$$

что противоречиво (см. доказательство 1).

3. Спектр дискретен. Действительно, если для некоторого n^* $\lambda > \lambda_{k_i, n^*}$, то, в силу теоремы Штурма, существует по крайней мере $k_i - 1$ номеров n таких, что $y_n(\lambda) y_{n-1}(\lambda) > 0$, следовательно, не существует сходящейся последовательности λ_{k_i, n_i} $(k_i \to \infty,\ n_i \to \infty)$.

4. Можно показать, что $y_n(\lambda_k)$ принадлежит l_2. Из соотношения (13) и принадлежности $y_n(\lambda_k)$ и l_2 следует ортогональность последовательностей $y_n(\lambda_i)$ и $y_n(\lambda_j)$, $i \neq j$. Применяя равенство Парсеваля для последовательности $y_n(\lambda_k)$, получим, что величина разрыва функции $\sigma(\lambda)$ в точке λ_k равна $1 \Big/ \sum_0^\infty y_n^2(\lambda_k) > 0$, ибо $y_n(\lambda_k) \subset l_2$. Легко видеть, что спектр ограничен слева.

Вопросы, рассматриваемые в этой заметке, поставлены мне Б. М. Левитаном; пользуюсь случаем выразить ему свою искреннюю признательность.

Поступило
21 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Разложение по собственным функциям, 1950. [2] Б. М. Левитан, ДАН, 73, № 4 (1950). [3] М. Г. Крейн, Укр. матем. журн., 2, 1 (1949). [4] М. Г. Крейн, ДАН, 69, № 2 (1949).