Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 3

МАТЕМАТИКА

М. А. АКИВИС

ИНВАРИАНТНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ КОНФОРМНОГО ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 27 XI 1951)

1. Настоящая работа содержит инвариантное построение геометрии гиперповерхности n-мерного конформного пространства. В отличие от работ А. П. Нордена (1), посвященных геометрии нормализованных поверхностей, эта работа содержит построения, не зависящие от оснащения поверхности.

В работе применяется метод, развитый Г. Ф. Лаптевым (2), состоящий в применении теории представлений групп Ли и исчисления внешних дифференциальных форм к исследованию погруженных многообразий.

2. С каждой точкой конформного пространства свяжем подвижной репер, состоящий из двух точек A_0, A_{n+1} и n линейно независимых гиперсфер $A_1, A_2, \ldots, A_n$, проходящих через эти точки. Скалярные произведения элементов подвижного репера удовлетворяют ряду соотношений, вследствие которых компоненты ω_ξ^η $(\xi, \eta = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n+1)$ инфинитезимального перемещения этого репера удовлетворяют некоторой системе линейных уравнений. Кроме того, эти формы удовлетворяют уравнениям структуры конформного пространства (3).

3. Рассмотрим неизотропную гиперповерхность S конформного пространства. С каждой точкой этой гиперповерхности свяжем семейство реперов первого порядка, точка A_0 которых совпадает с соответствующей точкой гиперповерхности, гиперсфера A_n касается гиперповерхности в этой точке, а гиперсферы $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ ортогональны гиперсфере A_n. Множество реперов, присоединенное к гиперповерхности S, выделяется из всей совокупности реперов конформного пространства уравнением Пфаффа $\omega^n = 0$, которое, таким образом, является дифференциальным уравнением гиперповерхности S.

Матрица скалярных произведений $(A_i A_j) = g_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n-1)$, ортогональных гиперповерхности гиперсфер, является невырожденной, а связанная с ней квадратичная форма $g_{ij}\,\omega^i\omega^j$, определяющая угловую метрику на гиперповерхности, — положительно определенной.

4. Строя дифференциальные продолжения (4) уравнения Пфаффа $\omega^n = 0$, придем к последовательности систем уравнений Пфаффа

$$\omega_i^n = \alpha_{ij}\omega^j,$$

$$\tilde{d}\alpha_{ij} = \alpha_{ij}\,\omega_0^0 - g_{ij}\,\omega_n^0 + \beta_{ijk}\omega^k,$$

$$\tilde{d}\beta_{ijk} = \beta_{ijk}\omega_0^0 + 3\{\alpha_{(ij}g_{k)l} - g_{(ij}\alpha_{k)l}\}\,\omega_{n+1}^l -$$
$$- \{3g^{pq}\alpha_{(ij}\alpha_{k)p}\alpha_{ql} - \gamma_{ijkl}\}\,\omega^l$$

и т. д., где оператор $\tilde{d}$ построен по типу

$$\tilde{d}\alpha_{ij} = d\alpha_{ij} - \alpha_{ik}(\omega_j^k - \delta_j^k\omega_0^0) - \alpha_{kj}(\omega_i^k - \delta_i^k\omega_0^0),$$

α_{ij}, β_{ijk}, γ_{ijkl} и т. д. суть величины симметричные, а круглые скобки при индексах обозначают циклирование.

Величина α_{ij} вместе с относительным тензором g_{ij}, удовлетворяющим уравнению $\tilde{d}g_{ij} = 2g_{ij}\omega_0^0$, образует геометрический объект в смысле Г. Ф. Лаптева, именно, фундаментальный дифференциально-геометрический объект класса A. Точно так же системы величин β_{ijk}, α_{ij}, g_{ij}; γ_{ijkl}, β_{ijk}, α_{ij}, g_{ij} и т. д. образуют дифференциально-геометрические объекты — фундаментальные объекты класса B, класса C и т. д. При этом уже фундаментальный объект класса C — объект четвертого порядка — охватывает группу преобразований реперов первого порядка, т. е. является основным фундаментальным объектом гиперповерхности S.

5. Структура фундаментальных дифференциально-геометрических объектов довольно сложна, вследствие чего непосредственное истолкование их геометрического смысла затруднительно. Мы строим при их помощи более простые объекты, выяснить геометрический смысл которых гораздо проще, которые также целиком исчерпывают геометрию гиперповерхности S.

В классе A можно определить геометрический объект $a = \frac{1}{n-1}g^{ij}\alpha_{ij}$, удовлетворяющий уравнению

$$da = -a\omega_0^0 - \omega_n^0 + \beta_k\omega^k,$$

где $\beta_k = \frac{1}{n-1}g^{ij}\beta_{ijk}$, а g^{ij} — тензор, взаимный тензору g_{ij}. Объект a позволяет построить в классе A двухвалентный симметричный относительный тензор

$$a_{ij} = \alpha_{ij} - ag_{ij}.$$

Величина β_k принадлежит классу B и удовлетворяет уравнению

$$d\beta_k = -\beta_k\omega_0^0 - a_{kl}\,\omega_{n+1}^l + \bar{\gamma}_{kl}\,\omega^l, \quad \bar{\gamma}_{kl} = \bar{\gamma}_{lk}.$$

В том случае, когда $\det a_{ij} \neq 0$, эта величина позволяет построить геометрические объекты $b^i = a^{ij}\beta_j$, где a^{ij} — тензор, взаимный тензору a_{ij}, и $b_i = g_{ij}b^i$, удовлетворяющие, соответственно, уравнениям

$$\tilde{d}b^i = -2b^i\omega_0^0 - \omega_{n+1}^i + \gamma_j^i\omega^j \quad \text{и} \quad \tilde{d}b_i = \omega_i^0 + \gamma_{ij}\omega^j,$$

где γ_j^i и γ_{ij} принадлежат классу C.

Объект b^i позволяет построить в классе B трехвалентный симметрический относительный тензор

$$b_{ijk} = \beta_{ijk} + 3\{a_{(ij}g_{k)l} - g_{(ij}a_{k)l}\}\,b^l.$$

Наконец, в классе C можно построить двухвалентный абсолютный тензор

$$c_{ij} = \gamma_{ij} + aa_{ij} - {}^1\!/_2\,(g_{kl}b^kb^l - a^2)\,g_{ij} + b_ib_j.$$

Этот тензор, вообще говоря, несимметричен, но удовлетворяет условию $g^{hl}c_{k[i}a_{j]l}=0$.

Тензоры a_{ij} и b_{ijk} аполярны тензору g_{ij}. Тензоры g_{ij}, a_{ij} b_{ijk} и c_{ij} удовлетворяют, кроме того, условиям, аналогичным уравнениям Гаусса — Кодацци метрической геометрии. Эти тензоры определяют гиперповерхность S с точностью до ее конформного преобразования.

Тензоры g_{ij} и a_{ij} при $n=3$ были известны как конформно-инвариантные тензоры еще в классической дифференциальной геометрии.

6. Введенные дифференциально-геометрические объекты позволяют построить инвариантные геометрические образы, связанные с точкой A_0 гиперповерхности S. Это, прежде всего, центральная гиперсфера $C=aA_0+A_n$. Из всех касательных гиперсфер она выделяется тем, что направления, вдоль которых она имеет с гиперповерхностью касание второго порядка, удовлетворяют уравнению $a_{ij}\omega^i\omega^j=0$. В том случае, когда тензор a_{ij} гиперповерхности S не вырождается, ее семейство центральных гиперсфер зависит от $n-1$ параметров; при этом огибающая этого семейства имеет две не совпадающие между собою полости, одной из которых является сама гиперповерхность S, а вторая есть отличная от S гиперповерхность S', точка A_0' которой, соответствующая точке A_0 гиперповерхности S, записывается в виде

$$A_0'=-{}^1/_2\,(g_{ij}b^ib^j+a^2)\,A_0+b^iA_i-aA_n+A_{n+1}.$$

Если же ранг тензора a_{ij} снижается до некоторого значения $m<n-1$, то получается следующая картина: если $m<n-2$, то семейство центральных гиперсфер гиперповерхности S зависит от m параметров; если же $m=n-2$, то имеются две возможности: либо семейство центральных гиперсфер гиперповерхности зависит от $n-2$ параметров, либо оно зависит от $n-1$ параметров, но обе полости огибающей этого семейства гиперсфер совпадают с гиперповерхностью S. Обратно: если семейство центральных гиперсфер гиперповерхности S зависит от $m<n-1$ параметров, то ее тензор a_{ij} имеет ранг m; если это семейство зависит от $n-1$ параметра, но обе полости его огибающей совпадают с гиперповерхностью S, то ранг тензора a_{ij} равен $n-2$.

В том случае, когда семейство центральных гиперсфер гиперповерхности S зависит от $m<n-1$ параметров, эта поверхность образована m-параметрическим семейством $(n-1-m)$-мерных сфер, причем вдоль каждой $(n-1-m)$-мерной сферической образующей гиперповерхность имеет постоянную центральную гиперсферу.

7. Будем называть циклидами гиперповерхности, полисферические координаты точек которых удовлетворяют уравнениям вида $p_{\xi\eta}x^\xi x^\eta=0$ $(\xi,\ \eta=0,\ 1,\ \ldots,\ n+1)$. В общем случае не существует циклиды, имеющей касание третьего порядка с гиперповерхностью в этой точке; существуют лишь циклиды, имеющие с ней касание второго порядка, причем семейство таких циклид зависит от $2n+1$ параметров.

Если же тензор b_{ijk} гиперповерхности S может быть представлен в точке A_0 в виде

$$b_{ijk}=3\left\{\frac{2}{n+1}\,g_{(ij}a_{k)p}-a_{(ij}g_{k)p}\right\}l^p,$$

где l^p — некоторый контравариантный относительный вектор, то существует трехпараметрическое семейство циклид, имеющих с гиперповерхностью S касание третьего порядка в точке A_0. Подсчет параметров показывает, что указанное строение тензора b_{ijk} является особым только при $n > 3$. В случае, когда $n = 3$, тензор b_{ijk} всегда может быть представлен в таком виде. Следовательно, произвольная поверхность трехмерного конформного пространства в каждой точке имеет трехпараметрическое семейство циклид, имеющих с поверхностью в этой точке касание третьего порядка.

8. Относительно тензора c_{ij} поверхности S справедливы следующие предложения.

Симметрия тензора c_{ij} приводит к соответствию линий кривизны гиперповерхностей S и S' — изометричности гиперповерхности S. В этом случае конгруенция окружностей $P = A_0 - tC + {}^1/_2 t^2 A_0'$, ортогональных к гиперповерхностям S и S', является нормальной, а внутренняя геометрия гиперповерхностей S и S', индуцированная этой конгруенцией окружностей, является римановой (ср. ([1])). И обратно, каждый из этих трех признаков приводит к симметрии тензора c_{ij}.

Назовем аффинор $c_i^j = g^{jk} c_{ki}$ почти ортогональным, если он удовлетворяет условию $c_i^k {}^*c_k^j = \lambda^2 \delta_i^j$, где ${}^*c_i^j$ — аффинор, симметричный аффинору c_i^j. Почти ортогональность аффинора c_i^j есть необходимое и достаточное условие конформного соответствия между гиперповерхностями S и S'.

Пусть, наконец, гиперповерхность S такова, что ее тензор c_{ij} симметричен, а аффинор c_i^j почти ортогонален. Оказывается, что в этом случае аффинор c_i^j может лишь множителем отличаться от единичного, $c_i^j = \lambda \delta_i^j$. В этом случае гиперповерхность S будет с точностью до конформного преобразования минимальной гиперповерхностью гиперболической, евклидовой или эллиптической геометрии, смотря по тому, больше, равен или меньше нуля коэффициент пропорциональности λ (ср. ([5])).

Поступило
15 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. П. Норден, Пространства аффинной связности, 1950. [2] Г. Ф. Лаптев, О многообразиях геометрических элементов, Диссертация, МГУ. [3] E. Cartan, Ann. Soc. Polon. de Math., 2 (1923). [4] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, 1948. [5] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie, 3, Berlin, 1929.