Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 2

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Г. И. ГУРЕВИЧ

К ВОПРОСУ О КРИТЕРИЯХ ПРОЧНОСТИ

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 6 XI 1951)

Ранее было показано [1], что если деформация ε практически представляет собой сумму только упругой (гуковской) и остаточной ее составляющих, то ход кривой деформация — напряжение можно описать, исходя из дифференциального уравнения

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E - \frac{\sigma e^{-(u_0 - a\sigma)/kT}}{\tau_0 d\varepsilon / dt}. \tag{1}$$

Уравнение (1) — одно из трех уравнений, связывающих главные деформации и напряжения элементарного параллелепипеда (однородного и изотропного тела), находящегося в условиях одноосного напряженного состояния (для конкретности взят случай растяжения) *. Оно характеризует широко подтверждающуюся на практике зависимость предела текучести σ_{const} (достигаемого при $d\sigma / d\varepsilon \simeq 0$) от T и $d\varepsilon / dt$ (температуры и скорости деформирования).

Но (1) не отвечает на вопрос: как меняется σ_{const} при перемене способа деформирования и каковы деформации по двум другим осям. Тем более вне поля зрения остаются случаи двухосного и трехосного нагружения. Для ответа на эти вопросы необходима система из трех уравнений, связывающих все главные напряжения и деформации.

Эти уравнения, которые можно получить, исходя из тех же основных представлений молекулярной физики, что и в предыдущей работе, приводятся к виду, аналогичному (1):

$$\frac{de_i}{d\varepsilon_i} = 1 - \frac{\sigma_i - P}{\eta_0 d\varepsilon_i / dt} e^{-\frac{u_0 - mP - n|\sigma_i - P|_{\max}}{kT}} \qquad (i = x,\ y,\ z), \tag{2}$$

где $P = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$, а $e_i = \frac{(1+\mu)\sigma_i - 3\mu P}{E}$ — упругая относительная деформация по соответствующей оси (μ — коэффициент Пуассона).

Структурной постоянной a уравнения (1) соответствуют в системе (2) две постоянные m и n **. Можно показать, что если подчинить их

* При больших u_0 и соответствующих значениях a, T и $d\varepsilon / dt$ уравнение (1) описывает кривую растяжения «идеального упруго-пластичного тела». Кривую, характеризующую упрочнение, получим, учтя некоторое возрастание u_0 с ε, обусловленное структурными изменениями в ходе деформации.

** Легко видеть, что a уравнения (1) для случая одноосного растяжения равно $\frac{m + 2n}{3}$.

условию $m/n \ll 1$, то (2) будет находиться в общем согласии с комплексом основных фактов, наблюдаемых при механических испытаниях различных материалов (практически однородных и изотропных).

В качестве примера рассмотрим условия разрушения параллелепипеда (грани которого параллельны главным осям деформации) из «идеального упруго-пластичного» материала (памятуя, что при соответствующих температурах и скоростях нагружения поведение материала, описываемое с помощью тех же уравнений (2), было бы близко к поведению ньютоновской жидкости или какого-либо «промежуточного» — между гуковским и ньютоновским — «тела»).

При этом необходимо иметь в виду, что величины e_i в (2) не могут превышать некоторого значения $e_{\max}$ — структурной постоянной материала, характеризующей то предельное увеличение среднего расстояния между элементарными частицами тела, при котором разрушение системы связей между ними в отдельных участках тела приводит к макроскопическому разрушению последнего.

Следовательно, равенство:

$$\frac{(1+\mu)\,\sigma_i - 3\mu P}{E} = e_{\max} \tag{3}$$

(где i — ось наибольшего упругого удлинения) является условием хрупкого разрушения (или «отрыва»), т. е. такого типа разрушения, который будет следствием возрастания упругой деформации до предельно возможного значения*.

Но прежде чем осуществится (3) может иметь место «скачкообразный» переход «упруго-пластичного» материала к ускоренному течению и, как следствие, — вязкому разрушению (у которого механизм макроскопического проявления иной, чем в предыдущем случае). Этот переход, согласно (2), определяется условием:

$$\frac{m}{n} P + |\sigma_i - P|_{\max} = \frac{2}{3}\sigma_s, \tag{4}$$

где $^2/_3\,\sigma_s$ — величина, определяемая той точностью, с которой надо, по условиям задачи, фиксировать «отклонение» от закона Гука. Иначе говоря, $^2/_3\,\sigma_s$ должно быть выбрано так, чтобы до осуществления (4) уравнения (2) практически сводились к $de_i / d\varepsilon_i = 1$ **.

Полагая $m/n \ll 1$, получаем, что при одноосном растяжении и сжатии (4) выполняется при абсолютных величинах напряжений, равных приближенно $\sigma_s\left(1 + \frac{m}{2n}\right)$ в случае сжатия и $\sigma_s\left(1 - \frac{m}{2n}\right)$ в случае растяжения, что удовлетворяет фактическим сведениям о приблизительном равенстве этих пределов текучести, при несколько большей величине первого.

Рассмотрим теперь результаты, вытекающие из (4) для случая двухосного напряженного состояния, пренебрегая величиной $\frac{m}{n} P$ (могущей быть весьма существенной только при трехосном напряженном состоянии).

---

* Как известно, сен-венановский критерий прочности (3) довольно хорошо оправдывается для хрупких тел (однородных, изотропных и «не пористых»), т. е. тел, испытывающих практически только упругую деформацию перед разрушением.

** Как видно из (2), при различных T или $d\varepsilon_i / dt$ будет различным и σ_s, т. е. то значение, которого должна достигнуть величина $\frac{3}{2}\left[\frac{m}{n} P + |\sigma_i - P|_{\max}\right]$, чтобы крайним членом справа в (2) уже нельзя было пренебречь. Иначе говоря, σ_s — функция температуры и скорости деформирования.

На рис. 1, заимствованном из [2], приведены для ряда квази-изотропных поликристаллических материалов данные о тех соотношениях двух главных напряжений (при третьем равном нулю), при которых начинается вязкое разрушение. Кривые отвечают: *1* — кулоновскому критерию, *2* — формуле Губера — Мизеса, *3* — условию (4), которое также оказывается в общем соответствии с экспериментальными данными для двухосного напряженного состояния. Но (4), в отличие от других критериев прочности, вытекает из имеющего ясный физический смысл соотношения, характеризующего процесс деформации в целом и указывающего на постоянные, которые надо определять для классификации материалов по их механическим свойствам, являющимся функцией не только структуры, но и комплекса условий деформирования. Кроме того, из (4) следует и отвечающая фактам зависимость предела текучести от P, которая из кулоновского критерия не вытекает, но, как известно, весьма резко проявляется в некоторых случаях трехосного напряженного состояния, когда $|P|$ велико и величиной $\frac{m}{n}|P|$ нельзя пренебречь по сравнению с $|\sigma_i - P|_{\max}$.

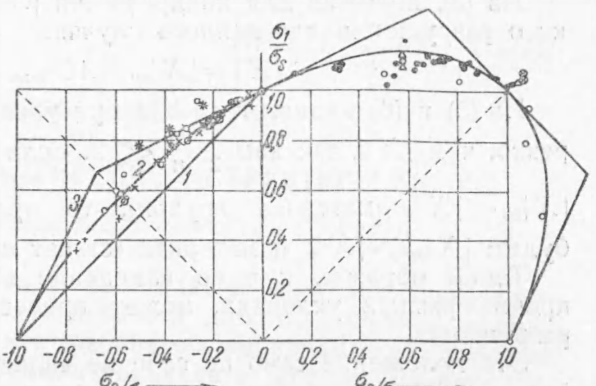

Рис. 1

В то же время, рассматривая (4) всегда в связи с (2) и (3), мы не встречаемся с тем абсурдным положением, вытекающим из формул Кулона и Губера — Мизеса (если их применять как универсальные критерии прочности), что при равном всестороннем растяжении материал не может разрушиться.

Действительно, равенство всех $(\sigma_i - P)$ нулю является не универсальным условием невозможности разрушения, а лишь условием невозможности остаточной деформации (и, следовательно, вязкого разрушения), ибо если все $(\sigma_i - P) = 0$, то имеет место только упругая деформация $e_x = e_y = e_z = \frac{(1-2\mu)P}{E}$. Если P положительно, то упругое растяжение может быть при этом доведено до величины $e_{\max}$ формулы (3), при котором наступает хрупкое разрушение *. Последнее может иметь место и при $(\sigma_i - P) \neq 0$, если (3) осуществляется раньше (4) **.

Отсюда следует, что уравнения (2) в сочетании с (3) позволяют подойти к выяснению зависимости типа разрушения не только от температурных и скоростных условий деформации, которыми определяется отношение величины σ_s к величине $e_{\max}$, но и от напряженного

---

* Элементарно очевидно, что при симметричной нагрузке (т. е. при $\sigma_i = P$) однородное и изотропное тело может либо только сжиматься «до предела», либо разрываться — в результате увеличения объема, но не менять свою форму, как это и следует из (2).

** При этом (2) также сводится практически к закону Гука, т. е. оказывается возможным только упругое удаление элементарных частиц тела друг от друга (вплоть до предельного), т. е. только хрупкое разрушение. Но и после наступления ускоренного течения материала может, при соответствующих условиях, осуществиться (3) и наступить хрупкое разрушение, если течение уже не привело к вязкому разрушению.

состояния. Действительно, исходя из (2), можно, например, предложить следующее объяснение факту «перехода в пластичное состояние» хрупких материалов, подвергнутых всестороннему давлению и дополнительному сжатию вдоль одной оси x.

Пусть $\sigma_x = -|\sigma_0| - |X|$ и $\sigma_y = \sigma_z = -|\sigma_0|$. Согласно (4), течение практически начинается при

$$|X| = |X|_s \simeq \left(1 + \frac{m}{2n}\right)\sigma_s + \frac{3}{2}\frac{m}{n}|\sigma_0|. \qquad (5)$$

Из (3), положив для конкретности $\mu = 0{,}25$, найдем условие хрупкого разрушения для данного случая:

$$|X| = |X|_{\text{хр}} = 4Ee_{\max} + 2|\sigma_0|. \qquad (6$$

Из (5) и (6) видно, что $|X|_{\text{хр}}$ при увеличении $|\sigma_0|$ возрастает более резко, чем $|X|_s$, так как $\frac{3}{2}\frac{m}{n} \ll 2$. Если при $|\sigma_0| = 0$ имеет место $|X|_{\text{хр}} < |X|_s$ (материал хрупок), то при $|\sigma_0| > \frac{(2n+m)\sigma_s - 2n(4Ee_{\max})}{4n-3m}$ будет: $|X|_{\text{хр}} > |X|_s$, и материал «станет пластичным».

Таким образом, и одно изменение напряженного состояния, при прочих равных условиях, может привести к изменению характера разрушения.

Это положение само по себе не является новым. Например, в работе ([2]) подчеркивается существенное значение случая перехода металлов от вязкого разрушения к хрупкому, обусловленного возникновением напряженного состояния, вызывающего всестороннее растяжение *.

Мы только хотели показать, что указанное положение можно получить как естественное следствие общей для различных тел (в том числе и жидких) основной закономерности деформации в таких условиях ее проявления, когда тело можно трактовать как твердое. А лишь имея представление о закономерности, лежащей в основе взаимоотношения упругих и остаточных деформаций, можно будет подойти и к правильному пониманию взаимосвязи между «пределом текучести», «сопротивлением отрыву» и структурой материала.

В заключение заметим, что переход от ε_i уравнений (2) к абсолютным деформациям ΔL_i можно осуществлять по формуле $\Delta L_i = \varepsilon_i L_{i\,(0)}$, только если ε_i достаточно малая доля единицы. При больших деформациях нужно применять точную формулу:

$$\Delta L_i = (e^{\varepsilon_i} - 1)\, L_{i\,(0)}, \qquad (7)$$

совпадающую с предыдущей при малом ε_i ($L_{i(0)}$ в формуле (7) — это размеры деформируемого параллелепипеда в момент, когда начинают регистрировать приращение деформации).

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
15 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. И. Гуревич, ЖТФ, 17, 1491 (1947). [2] Г. В. Ужик, Сопротивление отрыву и прочность металлов, 1950.

* Легко убедиться, что в случае, обратном рассмотренному выше, т. е. при растягивающих напряжениях $\sigma_x = \sigma_0 + X$ и $\sigma_y = \sigma_z = \sigma_0$, условия разрушения, полученные из (4) и (3) (при $\mu = 0{,}25$), будут $X = X_{\text{хр}} = Ee_{\max} - \frac{\sigma_0}{2}$ и $X = X_s \simeq \simeq \left(1 - \frac{m}{2n}\right)\sigma_s - \frac{3}{2}\frac{m}{n}\sigma_0$. Пусть $\frac{3m}{n} < \left(1 - \frac{m}{2n}\right)\frac{\sigma_s}{Ee_{\max}} < 1$. Тогда при $\sigma_0 = 0$ материал «пластичен». Но если задано $\sigma_0 > \frac{2nEe_{\max} - (2n-m)\sigma_s}{n-3m}$, то $X_s > X_{\text{хр}}$ и материал будет разрушаться хрупко.